УДК 621.375.024

Ландэ Д.В., д.т.н.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТЕНТНЫХ СЕТЕЙ

Институт проблем регистрации информации НАН Украины

Проведен анализ сложных сетей и их основные модели. Предложено модель контентной сети, которая содержит одну существенную підгонку – предворительное предположение степенного распределения степеней узлов.

Вступление

В настоящее время наряду с традиционной теорией графов активно развивается теория сложных сетей (от англ. – *Complex Networks*), в рамках которой предлагаются новые подходы к решению вычислительно сложных задач, характерных для современных сетевых структур [1, 2].

Основной причиной возникновения и развития теории сложных сетей являются свойства реальных современных сетей, включая веб-пространство, *Peer-To-Peer* сети, социальные, биологические сети, практически каждая из которых может считаться сложной.

Так, например, известная задача синтеза топологии сети допускает комбинаторный подход, опирающийся на представление сети в виде конечного графа без петель и кратных ребер. Использование методов перечисления графов для решения задачи топологической оптимизации считается неперспективным, так как необходимо исследовать огромное количество возможных вариантов соединения узлов линиями связи. Например, в сети из 10 узлов существует 2^{45} вариантов размещения линий связи (для 10 узлов теоретически возможно $C_{10}^2 = 10 \cdot 9/2 = 45$ линий соединений. Каждая из этих возможных линий связи может реально существовать – состояние «1», или не существовать – состояние «0», т.е. всего возможностей 2^{45}).

Вместе с тем, теория сложных сетей как область дискретной математики изучает характеристики сетей, учитывая не только их топологию, но и статистические феномены, распределение весов узлов и ребер, эффекты протекания, проводимости и т.д. При этом оказалось, что свойства многих реальных сетей существенно отличаются от свойств классических случайных графов.

В теории сложных сетей выделяют три основных направления: исследование статистических свойств, которые характеризуют поведение сетей; создание модели сетей; предсказание поведения сетей при изменении структурных свойств.

Основные параметры сложных сетей

При анализе сложных сетей исследуются параметры отдельных узлов; параметры сети в целом; сетевые подструктуры.

Для отдельных узлов выделяют такие основные параметры:

– входная степень связности узла – количество ребер, которые входят в узел;

– выходная степень связности узла – количество ребер, которые выходят из узла;

– расстояние от данного узла до каждого из других;

– среднее расстояние от данного узла до других;

– эксцентричность – наибольшее из геодезических расстояний от выбранного узла к другим;

– посредничество – свойство, показывающее, сколько кратчайших путей проходит через данный узел;

– центральность – общее количество связей данного узла по отношению к другим;

– уязвимость – уровень спада производительности сети в случае удаления узла и всех смежных ему ребер.

Д. Уаттс (*D. Watts*) и С. Строгатц (*S. Strogatz*) в 1998 году определили такой параметр сетей, как коэффициент кластеризации [3], который соответствует уровню связности узлов в сети. Этот коэффициент характеризует тенденцию к образованию групп взаимосвязанных узлов, так называемых клик. Для конкретного узла коэффициент кластеризации показывает, сколько ближайших соседей данного узла являются также ближайшими соседями друг для друга. Этот коэффициент для узла сети определяется следующим образом.

Пусть из узла выходит k ребер, которые соединяют его с k другими узлами, ближайшими соседями. Если предположить, что все ближайшие соседи соединены непосредственно друг с другом, то количество ребер между ними составляло бы $1/2\,k(k-1)$, т.е. это число, соответствующее максимально возможному количеству ребер, которыми могли бы соединяться ближайшие соседи выбранного узла. Отношение реального количества ребер, соединяющих ближайших соседей данного узла, к максимально возможному называется коэффициентом кластеризации узла i – $C(i)$.

Для расчета индексов сети в целом используют такие параметры, как количество узлов, ребер, среднее расстояние между узлами, плотность (отношение количества ребер в сети к возможному максимальному количеству ребер при данном количестве узлов), количество симметричных, транзитивных и циклических триад, диаметр, уязвимость, ассортативность как мера корреляции между степенями узлов и т.д.

О сетевых подструктурах, в частности, о структуре сообщества в сложной сети можно говорить тогда, когда существует фрагмент сети – группа узлов, которые имеют высокую плотность ребер между собой, при том, что плотность ребер между отдельными фрагментами – низкая. Традиционный метод для выявления структуры сообществ – кластерный анализ. Для многих больших реальных сетей наличие структуры сообществ оказалось неотъемлемым свойством.

Важной характеристикой сети является функция распределения степеней узлов $P(k)$, которая определяется как вероятность того, что узел i имеет степень $k_i = k$. Для ориентированных сетей существует распределение выходящей полустепени $P^{out}(k^{out})$, и полустепени входной $P^{in}(k^{in})$, а также распределение общей степени $P^{io}(k^{in}, k^{out})$.

Сети, характеризующиеся разными распределением степеней узлов, демонстрируют разное поведение. На практике могут встречаться распределения Пуассона ($P(k) = e^{-m}\, m^k / k!$, где m – математическое ожидание), экспоненциальное ($P(k) = e^{-k/m}$), степенное ($P(k) \sim 1/k^{\gamma},\ \ k \neq 0,\ \ \gamma > 0$) и др.

Сети со степенным распределением степеней связности узлов называются безмасштабными (*scale-free*). Именно безмасштабное распределение особенно часто наблюдается в реально существующих сложных сетях.

Известно, что влиятельные исследователи определенных областей формируют сообщества сетевого типа, выражающиеся, например, в публикации совместных работ. Такая закономерность наблюдается также в других реальных сетях и отражает тенденцию, заключающуюся в хорошей связности между крупнейшими узлами-концентраторами. Это явление, известное под названием элитарность (или феномен «клуба богатых» – *rich-club phenomenon*), может быть охарактеризовано коэффициентом элитарности, введенным в работе [4].

Анализ топологии веб-пространства, показал, что узлы с большой степенью исходящих гиперссылок имеют больше связей между собой, чем с узлами с малой степенью, тогда как последние имеют больше связей с узлами с большой степенью, чем между собой. Исследование показало, что 27 % всех соединений имеют место между всего 5 % наибольших узлов, 60 % приходится на соединение других 95 % узлов с 5 % наибольших и только 13 % – это соединение между узлами, которые не входят в лидирующие 5 %.

Для сети G определим $R(k) = \{v \in N(G) \mid k_v > k\}$ – множество узлов со степенью, большей k. Коэффициент элитарности степени k выражается следующим образом:

$$\varphi(k) = \frac{1}{|R(k)|\left(|R(k)|-1\right)} \sum_{i,j \in R(k)} a_{ij},$$

где сумма соответствует удвоенному количеству ребер между вершинами в «элите».

Значительное количество структурных и динамических свойств сети определяется с помощью оценки корреляции между степенями соседних узлов. Такая корреляция может быть выражена через совокупное распределение $P(k, k')$, т.е. как вероятность того, что произвольно выбранное ребро соединяет узел степени k с узлом степени k'. Среднюю степень ближайших соседей узлов с заданной степенью k вычисляют по формуле:

$$S(k) = \sum_{k'} k' P(k' \mid k).$$

Показатель корреляции степеней связности позволяет выделить отдельные классы сетей. Если корреляция отсутствует, то $S(k)$ не зависит от значений k, $S(k)=\langle k^2\rangle/\langle k\rangle$. Если $S(k)$ возрастает при увеличении k, то узлы больших степеней тяготеют к соединениям с узлам больших степеней и сеть относят к ассортативным (отсюда и феномен «клуба богатых»). Если $S(k)$ – убывающая функция от k, то вершины больших степеней тяготеют к соединениям с вершинами малых степеней, и сеть называют дизассортативной [5]. Известно, что социальные сети склонны к ассортативности, а биологические и технологические часто дизассортативны [6]. Ассортативные сети менее уязвимы к равновероятным атакам, а дизассортативные менее уязвимы к целенаправленным атакам на узлы-концентраторы.

Примеры сложных сетей

К сложным безмасштабным сетям относятся, в частности, социальные сети, которые выражают социальные отношения между людьми. Вершинами этих сетей могут быть отдельные личности или группы людей. Эти сети охватывают социальные отношения между людьми и законы распространения в обществе потоков информации. Примерами социальных сетей могут служить сети соавторства ученых, сети телефонных звонков и электронных сообщений, сети знакомств, сети отношений между однокласниками, студентами, коллегами и др.

Наибольшей информационной сетью с доступной и наиболее изученной топологической структурой является веб-пространство. Узлами этой сети считаются веб-страницы, а направленными связками являются гиперсвязи, которые направлены от одной веб-страницы к другой.

Эта сеть – безмасштабная, и, как показал анализ подмножества из 271 млн узлов и 21,30 млрд линков [7], коэффициенты распределения степеней узлов составляют $\gamma_{in}=2{,}09$ и $\gamma_{out}=2{,}72$.

Веб-пространство является сетью тесного мира с оценками средней длины кратчайшего пути l = 11.2, а значение коэффициента кластеризации C = 0,15327 свидетельствует о высокой коррелированности этой сети [8, 9].

Кроме социальных и информационных, к перечню сложных сетей можно отнести технологические сети (железных дорог, авиалиний, линий электропередач, Интернета и тому подобное). Распределения степеней узлов этих сетей также подчиняются степенному закону.

Языковые структуры также можно рассматривать как сложные сети. Текст можно представить в виде совокупности узлов и связей, т.е. построить сеть языка (*language network*) [10]. Существуют различные способы интерпретации узлов и связей, что приводит, соответственно, к различным представлениям этой сети. Узлы могут быть соединены меду собой, если соответствующие им слова стоят рядом в тексте [11, 12], принадлежат одному предложению [13], соединены синтаксически [14, 15] или семантически [16, 17].

Сохранение синтаксических связей между словами приводит к изображению текста в виде направленной сети (*directed network*), где направление связи соответствует подчинению слова. При этом различают:

a. L-пространство. Связываются соседние слова, которые принадлежат одному предложению. Количество соседей для каждого слова (окно слова) определяется радиусом взаимодействия R, чаще всего рассматривается случай R = 1.

b. B-пространство. Рассматриваются узлы двух видов, соответствующие предложениям и словам, которые им принадлежат.

c. P-пространство. Все слова, которые принадлежат одному предложению, связываются между собой.

d. C-пространство. Предложения связываются между собой, если в них употреблены одинаковые слова.

Для сети (L-пространство), построенной на основании Британского национального лингвистичексого корпуса (*http://www.natcorp.ox.ac.uk/*), оказалось, что данная сеть английского языка безмасштабна, а поведение степени $P(k)$ характеризуется двумя режимами степенного распределения со значениями степенного показателя $\gamma=1{,}5$ для k<2000 и $\gamma=2{,}7$ для k>2000 соответственно [11].

Считается, что, если средняя длина кратчайшего пути растет с размером (количеством узлов) сети медленнее любой функции степени, то сеть является «малым миром». Сети малого мира чрезвычайно компактны. Для упомянутой выше сети английского языка длина кратчайшего пути составляет всего $\langle l\rangle=2{,}63$.

Для Британского национального корпуса на основании анализа текстов, которые содержали $\approx 10^7$ слов, получено значение коэффициента кластеризации $\langle C \rangle = 0{,}687$. Полученные результаты убедительно свидетельствуют о том, что сеть языка является сильно коррелирующим безмасштабным малым миром.

Существует ряд публикаций, в которых сделана попытка объяснить свойства сетей языка с помощью сценария подавляющего присоединения (*preferential attachment*), рассматривая их как результат процесса роста, когда новые узлы-слова с большей вероятностью присоединяются к узлам-коммутаторами, имеющим много связей. [7]

Моделирование сложных сетей

Модель случайной сети Эрдоша-Рени

Согласно модели Эрдоша-Рени рассматривается сеть из N вершин, в которой каждая пара вершин соединяется с вероятностью p [18]. Таким образом создается граф приблизительно с $pN(N-1)/2$ случайно выбранными ребрами.

Существует две модели классического случайного графа: в первой считается, что M ребер распределены произвольно и независимо между парами из N вершин графа; во второй модели фиксируется вероятность m, с которой может объединяться каждая из пар вершин. При $m \to \infty$ и $N \to \infty$ для обоих вариантов распределение степеней узлов k определяется формулой Пуассона:

$$P(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!},$$

где среднее значение степени узла: $\langle k \rangle = 2M / N$ для первой модели и $\langle k \rangle = mN$ для второй. При этом средняя длина кратчайшего пути для сети Эрдоша-Рени составляет:

$$\langle l \rangle = \ln(N) / \ln(\langle k \rangle),$$

а коэффициент кластеризации:

$$C \sim \langle k \rangle / N.$$

Со времени своего представления эта модель считалась основной при изучении сложных сетей. Однако растущий интерес к сложным сетям подсказал многим ученым пересмотреть эту парадигму. Оказалось, что наибольшее количество реальных сетей соответствуют степенному закону распределения.

Модель малых миров

Несмотря на огромные размеры некоторых сложных сетей, во многих из них существует сравнительно короткий путь между двумя любыми узлами. В 1967 г. психолог С. Милгран в результате проделанных масштабных экспериментов вычислил, что существует цепочка знакомств, в среднем длиной шесть, практически между двумя любыми гражданами США [19].

Сетевые структуры, соответствующие свойствам малых миров обладают следующими типичными свойствами: малая средняя длина пути относительно диаметра сети (что характерно также для случайных сетей) и большой коэффициент кластеризации (что присуще сетям с регулярной структурой). При исследовании этого феномена была предложена процедура построения наглядной модели сети, которой присущ этот феномен [20].

Для того, чтобы построить сеть «малого мира» в соответствии с этой процедурой, следует начать с регулярной циклической решетки с N вершинами, каждая из которых соединена с k (в частности, k =2) ближайшими соседями в каждом направлении. Для каждой вершины задается $2k$ связей, где $N >> \log_2(N) >> 1$. Затем каждое ребро «перебрасывается» с вероятностью p от случайно выбранной вершины к другой случайно выбранной.

При условии $p = 0$ получается упорядоченная решетка с большим количеством циклов и большими расстояниями, а при условии $p \to 1$ сеть становится случайным графом с короткими расстояниями и малым количеством циклов. В некотором среднем случае присутствуют и короткие расстояния и большое количество циклов.

В реальности оказалось, что именно те сети, узлы которых имеют одновременно некоторое количество локальных и случайных «далеких» связей, демонстрируют эффект малого мира.

Процедура преимущественного присоединения Барабаши-Альберта

Сценарий построения сетей Барабаши-Алберта базируется на двух механизмах – росте и преимущественном присоединении

[21]. Данная модель используется такой алгоритм: рост сети происходит начиная с небольшого количества узлов n_0, к которым на каждом временном шагу добавляется новый узел с $n \le n_0$ связями, которые присоединяются к уже существующим узлам; преимущественное присоединение состоит в том, что вероятность присоединения $P(k_i)$ нового узла к уже существующему узлу i зависти от степени k_i узла i:

$$P(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}.$$

Здесь в знаменателе суммирование ведется по всем узлам. Как компьютерные модели, так и аналитические решения модели Барабаши-Альберта дают степенную асимптотику распределения степеней узлов с показателем $\gamma = 3$.

В работе Барабаши и Альберт [21] приведены ссылки на несколько формальных алгоритмов генерации сложных сетей, а также параметры получаемых сетей.

Сложные сети с заданным распределением

Наиболее популярным способом генерации сетей с заданным законом распределения степеней вершин является так называемая конфигурационная модель [22–24] или близкая ей по смыслу *l* – процедура [25]. Если распределение p_k задано, то вычислительная процедура сводится к следующим операциям [26]:

– формируется степенная последовательность *d*, выбирая *N* чисел k_i согласно заданному распределению p_k, где $i = 1,...,N$;

– каждой вершине *i* графа присваивается k_i «заготовок» (концов) для будущих ребер;

– из степенной последовательности случайно извлекаются пары «заготовок». Они соединяются ребром в том случае, если новое ребро не приведет к появлению ребер-циклов (петель) или мультиребер. Если ребро сгенерировано, то соответствующие индексы из степенной последовательности удаляются;

– предыдущий шаг повторяется до тех пор, пока степенная последовательность не пуста.

На основе распределения p_k любой граф может быть построен $\prod_i k_i!$ различными способами, поскольку «заготовки» для будущих ребер неразличимы. Таким образом, этот процесс с равной вероятностью генерирует любую возможную конфигурацию сети с заданным распределением степеней вершин. Преимуществом данного алгоритма является его универсальность, так как с его помощью можно построить сеть с любым распределением степеней вершин.

Другой, близкий к этому алгоритм заключается в последовательном создании графа, при котором на каждом этапе для каждой вершины с заданной заранее степенью добавляется ребро с другой вершиной из списка возможных с вероятностью пропорциональной ее степени [27]. Основные преимущества этого алгоритма – отсутствие зацикливаний и точное аналитическое обоснование.

Алгоритм построения контентной сети

Алгоритм Барабаши-Альберта позволяет генерировать сети со степенным распределением, однако эти сети слишком формальны, в них нет содержательной составляющей, в частности, им не присущ феномена «клуба богатых», характерный для многих реальных сетей.

Для построения модели сети с параметрами, близкими к тем, которые наблюдаются в веб-пространстве, предлагается рассмотреть следующую архитектуру сети. Пусть сеть состоит из *N* узлов. Пусть есть *i*-й узел V_i (аналог веб-сайта). Пусть узел V_i содержит n_i документов $d_j^{(i)}$ (веб-страниц). Здесь $j = 1,...,n_i$. Каждый документ имеет свой поисковый образ – вектор из весов термов (ключевых слов и устойчивых словосочетаний), входящих в него: $d_j^{(i)} = (w_{j,1}^{(i)},...,w_{j,m}^{(i)})$, *m* – объем тезауруса (словаря).

Изначально предполагается, что распределение количества документов по узлам – степенное (аналог – распределение богатства – закон Парето). Распределение ключевых слов в документах – также степенное (аналог – распределение слов в текстах – закон Ципфа). В качестве направленных ребер сети рассматриваются гиперссылки между узлами. Предполагается, что количество входящих в узел ребер пропорционально количеству документов, принадлежащих ему. Также предполагается, что распределение степеней узлов сети – как и в случае веб-пространства степенное.

Базой для процедуры построения данной безмасштабной сети является приведенный в предыдущем разделе алгоритм, дополненный некоторыми контентными ограничениями, а именно, связи устанавливаются преимущественно с «подобными» (близкими по набору ключевых слов) узлами, направление связи преимущественно от менее крупного (по количеству документов) узла к более крупному.

Для каждого узла сети вычисляется центроид – вектор $c_i = (c_{1,i}, ..., c_{m,i})$ размерности m, как покоординатное среднее арифметическое всех входящих в узел документов:

$$c_{j,i} = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} w_{i,j}^{(k)} .$$

Близость между документами можно вычислить, например, как скалярное произведение соответствующих центроидов (векторно-пространственная модель):

$$sim(V_i, V_j) = \frac{\sum_{k=1}^{m} c_{k,i} c_{k,j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} c_{k,i}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{m} c_{k,j}^2}} .$$

Предлагается следующие основные шаги алгоритма генерации модели контентной сети:

1. Выбирается количество узлов сети N;

2. Для каждого узла V_i генерируется число, соответствующее количеству документов $d_j^{(i)}$: n_i – его объем;

3. Для каждого документа $d_j^{(i)}$ генерируется вектор ключевых слов: $d_j^{(i)} = (w_{j,1}^{(i)}, ..., w_{j,m}^{(i)})$;

4. Для каждого узла V_i генерируются его входная и выходная степени, приблизительно пропорциональные его объему. Степени узлов заранее распределяются по степенному закону;

5. Для каждого узла рассчитывается центроид;

6. Вычисляется матрица близости между документами с элементами $sim(V_i, V_j)$;

7. Циклично, начиная с узла с наибольшей входной степенью, случайным образом устанавливаются ребра от свободных выходных концов других узлов к свободным входным концам данного узла.

К преимуществам предлагаемой модели можно отнести:

1. Ориентацию на контент документов при установлении связей (построении ребер);

2. При построении сети учитываются вполне реальные предпосылки (чем больше узел, тем больше ссылок устанавливается на него, преимущественно устанавливаются связи близкими по содержанию узлами, учитывается реалистическое распределение количества документов между узлами и ключевых слов в документах);

3. В построенной сети, оказалось, что такой показатель, как *PageRank* имеет решающее значение при организации содержательного поиска в сети.

Выводы

Полученная в результате моделирования сеть, обладает многими параметрами, близкими к реальной сети, что по-видимому, позволит решать некоторые задачи, обуславливающие моделирование сетей близких к реальным, а именно:

– выявления новых закономерностей и феноменов;

– изучение природы формирования/развития отдельных сетей;

– моделирование процессов передачи информации в сетях;

– моделирование задач заражения/иммунизации;

– противодействия сетевым атакам;

– решения задач навигации (поиска) в сетевых структурах и т.п.

Вместе с тем, предложенная модель контентной сети содержит одну существенную подгонку. Заранее предполагается степенное распределение степеней узлов. На данном этапе модель не позволила естественным образом, исходя из распределения объемов документов и слов внутри документов, получить распределение, присущее реальным сетям. По-видимому, для этого требуется более глубокое понимание некоторых социально-психологических процессов, ведущих к установлению ссылок в реальных сетях.

Список литературы

1. Newman M.E.J. The structure and function of complex networks // SIAM Rev. – 2003. – 45. – P. 167-256.

2. Dorogovtsev S.N., Mendes J.F.F. Evolution of networks: from biological networks to the Internet and WWW. – Oxford University Press, 2003. – P. 180-182.

3. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of «smallworld» networks // Nature.— 1998. – 393. – P. 440-442.

4. Zhou S., Mondragon R.J. The rich-club phenomenon in the internet topology // Commun. Lett. IEEE. – 2004. – 8. – P. 180-182.

5. Newman M.E.J. Assortative mixing in networks // Phys. Rev. Lett. – 2002. – 89 (208701).

6. Barabasi A., Albert R. Emergence of scaling in random networks // Science.– 1997. – 286. – P. 509-512.

7. Broder A., Kumar R., Maghoul F., Raghavan P., Rajagopalan S., Stata R., Tomkins A., Wiener J. Graph structure in the web // Computer Networks, 2000. – 33. P 309–320.

8. Albert R., Jeong H., Barabasi A.-L. Diameter of the world wide web // Nature (London). – 1999. – P. 401, 130.

9. Пасічник В.В., Іванущак Н.М. Дослідження та моделювання складних мереж // Східно-Європейський журнал передових технологій. – 2010. – 2/3 (44). – С. 43-48.

10. Головач Ю., Пальчиков В. Лис Микита і мережі мови // Журн. Фіз. Досл., 2006. – 10. – С. 247-291.

11. Ferrer-i-Cancho, R., Sole R.V. The small world of human language // Proc. R. Soc. Lond., 2001. – B 268. – P. 2261-2265.

12. Dorogovtsev S.N., Mendes J. F. F. Language as an evolving word web // Proc. R. Soc. Lond., 2001. – B 268. – P. 2603.

13. Caldeira S. M. G., Petit Lobao T. C., Andrade R. F. S., Neme A., Miranda J. G. V. The network of concepts in written texts // Preprint physics/0508066 (2005).

14. Ferrer-i-Cancho R., Sole R.V., Kohler R. Patterns in syntactic dependency networks // hys. Rev., 2004. – E 69. – P. 051915.

15. Ferrer-i-Cancho, R. The variation of Zipf's law in human language. // Phys. Rev., 2005. – E 70. – P. 056135.

16. Motter A. E., de Moura A. P. S., Lai Y.-C., Dasgupta P. Topology of the conceptual network of language // Phys. Rev., 2002. – E 65. – P. 065102(R).

17. Sigman M., Cecchi G A. Global Properties of the Wordnet Lexicon // Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 2002. – 99. – P. 1742.

18. Erdős P., Rényi A. The Evolution of Random Graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., 1960. – 5. – P. 17–61.

19. Milgram S. The small world problem // Psychology Today. – 1967. – 2. – P. 60-67.

20. Watts D.J., Strogatz S.H. Collective dynamics of «smallworld» networks // Nature. – 1998. – 393. – P. 440-442.

21. Albert R., Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Review of Modern Physics, 2002. – 74. – P. 47-97.

22. Bekessy A., Bekessy P., Komlos J. Asymptotic enumeration of regular matrices // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. – 1972. – 7. – P. 343–353.

23. Bender E.A., Canfield E.R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // Journal of Combinatorial Theory A. – 1978. – 24. – P. 296–307.

24. Molloy M., Reed B. A critical point for random graphs with a given degree sequence // Random Structures Algorithms. – 1995. – 6. – P. 161–179.

25. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И. и др. Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

26. Иванов С.В., Колыхматов И.И., Бухановский А.В. Параллельные алгоритмы моделирования комплексных сетей // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – № 10. – 2008. – С. 5-12.

27. Blitzstein J. K., Diaconis P. A Sequential Importance Sampling Algorithm for Generating Random Graphs with Prescribed Degrees // Preprint. Internet Mathematics. – Vol. 6, Issue 4, 2011. – P. 489-522.