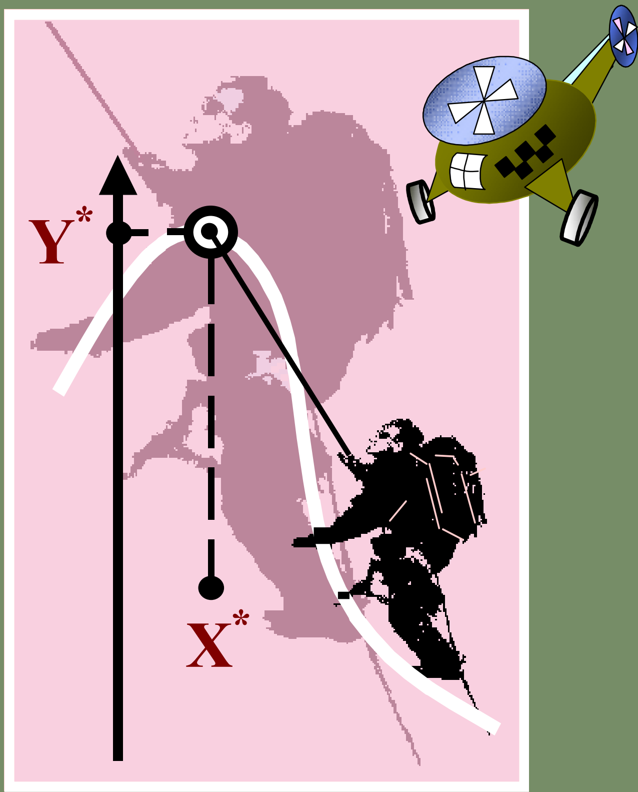
М.І.Самойленко, Б.Г.Скоков,



ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М.І. Самойленко, Б.Г.Скоков

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів спеціальностей
"Бухгалтерський облік і аудит",
"Менеджмент організацій"*

Харків – ХНАМГ – 2005

ББК 22.18
УДК 519.47

Самойленко М.І., Скоков Б.Г.
С17 Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.

Посібник знайомить з основними поняттями і методами досліджень операцій. Наведені методи ілюструються типовими прикладами. Велику увагу приділено використанню сучасних інформаційних технологій для вирішення прикладних задач дослідження операцій.

Призначений для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей 8.0501 06 "Бухгалтерський облік і аудит" і 8.0502 01 "Менеджмент організацій".

Табл. – 21. Іл. – 34. Бібліогр. – 18 назв.

Рецензенти:

директор Інституту комп'ютерних і інформаційних технологій Харківського національного університету радіоелектроніки, д-р техн. наук, проф. *В.М.Левикін*;

зав. кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, д-р техн. наук, проф. *А.І.Колосов*

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, рішення № 1/11-6486 від 17.12.04

ISBN 966-695-060-X

Передмова

Цей навчальний посібник призначений для студентів денної і заочної форм навчання, які прослухали курси «Вища математика» і «Основи інформатики» і далі проходять підготовку за спеціальностями 8.0501 06 “Бухгалтерський облік і аудит”, 8.0502 01 “Менеджмент організацій”.

Мета посібника – забезпечити студентів навчальним і практичним матеріалом для самостійного вивчення дисципліни «Дослідження операцій» і використання методів дисципліни для моделювання та вирішення прикладних задач організації, планування і управління виробництвом із залученням сучасних інформаційних технологій.

Дисципліна «Дослідження операцій» сприяє подальшому підвищенню рівня фундаментальної математичної і комп'ютерної підготовки студентів.

Внаслідок вивчення теоретичного курсу, проведення практичних і лабораторних занять, виконання індивідуальних завдань і контрольних робіт студенти повинні:

освоїти методику математико-статистичної обробки виробничої інформації при вирішенні конкретних задач організації, планування і управління;

навчитися використовувати методи математичного програмування і теорії масового обслуговування для вирішення виробничих і планово-економічних задач;

придбати практичні навички по вибору і використанню сучасних інформаційних технологій для вирішення задач теорії дослідження операцій;

засвоїти методи і прийоми дослідження математичних моделей систем масового обслуговування за допомогою сучасних інформаційних технологій.

Особливостями навчального посібника є: спрямованість курсу на підготовку фахівців у галузі економіки, підприємництва та менеджменту; комп'ютерний ухил при виконанні рутинних обчислювальних процедур пошуку рішення в задачах дослідження операцій; індивідуалізація навчання і можливість самостійного вивчення курсу. З цією метою по кожній темі курсу в посібник включені задачі економічного характеру з докладним викладом технології їх вирішення засобами сучасної комп'ютерної техніки.

Для забезпечення можливості самостійного вивчення курсу посібник містить приклади вирішення типових задач за кожною темою, набори задач для самостійного розв’язання з відповідями і контрольні запитання для самоперевірки.

Наведені наприкінці книги додатки містять довідкові відомості, необхідні для виконання індивідуальних завдань.

В основу посібника покладено курс лекцій з дослідження операцій і інформаційних технологій, що викладаються нами у вищих навчальних закладах.

Висловлюємо щиру подяку рецензентам за їхню копітку працю з резензування навчального посібника й істотні зауваження, що сприяли поліпшенню змісту книги і методики її викладення.

Автори

ВСТУП

Загальна характеристика дисципліни

Для забезпечення якісного зростання суспільного виробництва і досягнення найвищої продуктивності праці необхідно перебудувати відповідно до сучасних методів управління господарський механізм. Перехід до ринкових відносин розширив права підприємств та їхню самостійність. Удосконалюються організація, нормування і стимулювання праці, на цій основі підвищуються відповідальність і зацікавленість трудових колективів у кінцевих результатах роботи.

Курс "Дослідження операцій" є одним з основних для студентів, які навчаються за спеціальностями економіки та менеджменту. Він складається з двох розділів, що охоплюють найважливіші математичні методи вирішення задач організації, планування і управління.

На лекціях студенти знайомляться з:

методами і прийомами математико-статистичного моделювання техніко-економічних показників на основі якісного і кількісного дослідження умов виробництва, професійної майстерності працівників, рівня організації праці і техніки та інших чинників;

принципами складання математичних моделей конкретних задач теорії дослідження операцій на основі поставлених цілей, необхідних умов і вимог їх досягнення;

математичними методами вирішення задач теорії дослідження операцій, що мають місце в економіці й менеджменті;

аналізом математичних моделей прикладних задач економіки і менеджменту з наступним вибором інформаційної технології комп'ютерного варіанта їхнього вирішення.

У результаті вивчення теоретичних основ курсу студенти повинні знати:

основні положення і методичні принципи математико-статистичного моделювання виробничих процесів і техніко-економічних показників;

методику попередньої обробки результатів експериментальних досліджень, хронометражних даних та іншої виробничої інформації при вирішенні конкретних задач організації, планування та управління;

класифікацію задач дослідження операцій залежно від кількості, типу й області припустимих значень змінних, кількості й типу цільових функцій, кількості, виду й характеру чинників, що обмежують;

математичні методи вирішення типових задач теорії дослідження операцій;

існуючі інформаційні технології ефективного вирішення прикладних задач теорії дослідження операцій.

Внаслідок проведення практичних і лабораторних занять, а також виконання індивідуальних контрольних завдань, передбачених програмою курсу, студенти повинні вміти:

попередньо обробляти виробничу інформацію при вирішенні конкретних задач;

формулювати і перевіряти статистичні гіпотези;

складати і класифікувати математичні моделі задач відповідно до їх типу;

вибирати математичний метод і інформаційну технологію для вирішення конкретної прикладної задачі теорії дослідження операцій;

визначати тип задачі масового обслуговування і необхідну для її вирішення виробничу інформацію.

Сучасні інформаційні технології в дослідженні операцій

Процедури вирішення задач дослідження операцій припускають виконання великого обсягу обчислювальної роботи. Багато процедур мають циклічний характер. Рутинна робота з пошуку рішення вимагає великих затрат сил і часу і може служити причиною виникнення помилок. Щоб уникнути появи помилкових результатів обчислювального характеру, властивих людині, і на декілька порядків скоротити час вирішення, необхідно процедури вирішення задач дослідження операцій здійснювати за допомогою сучасної комп'ютерної техніки.

У даному курсі використовується ряд інформаційних технологій, що зарекомендували себе як найбільш вдалі програмно-інструментальні засоби для розв’язання різних задач теорії дослідження операцій. Вибір тій або іншій технології для вирішення конкретної задачі визначається у першу чергу здатністю обраної технології справитися з цим завданням. Не менше важливою умовою для вибору є доступність програмного засобу. Через зазначені причини для навчальних цілей використовуються професійні програмні засоби, що одержали поширення у всьому світі, а саме:

для вирішення екстремальних задач з дискретною математичною моделлю і розрахунку показників функціонування систем масового обслуговування в сталому режимі роботи використовується офісний пакет *Microsoft Office* версії 7.0 або вище;

для вирішення екстремальних задач з безперервною математичною моделлю і розрахунку показників функціонування систем масового обслуговування в несталому режимі роботи використовується професійний математичний пакет *MathCAD 2000*.

Особливості використання перерахованих інформаційних технологій для вирішення задач, що складають предмет курсу, детально розглядаються у відповідних підрозділах посібника.

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ

Предмет, мета і завдання курсу

Предмет курсу – виробничі й планово-економічні задачі з раціонального використання трудових, матеріальних і фінансових ресурсів, традиційні методи і прийоми їх вирішення, комп'ютерні технології розв’язання задач теорії дослідження операцій.

Мета курсу – систематичне вивчення методів економіко-математичного моделювання виробничих процесів і їхнього практичного застосування для вирішення задач організації, планування і управління виробництвом.

Задачі курсу. результаті вивчення теоретичного курсу, виконання практичних і лабораторних завдань студенти повинні:

освоїти методику математико-статистичної обробки виробничої інформації при вирішенні конкретних задач з організації, планування та управління виробництвом;

опанувати методами математичного програмування і теорії масового обслуговування;

навчитися вибирати і використовувати сучасні комп'ютерні технології для вирішення задач дослідження операцій.

РОЗДІЛ 1
МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 1.1. Економічні передумови постановки і вирішення задач математичного програмування

Розвиток чисельних методів вирішення планово-економічних і виробничих задач. Основні економічні передумови постановки та вирішення задач методами математичного програмування: органічне сполучення централізованого народногосподарського планування з розширенням самостійності підприємств, багатоваріантність використання обмежених ресурсів і виробничих потужностей, можливість одержання необхідної і достовірної інформації, широке використання ЕОМ, достатня теоретична розробка методів економіко-математичного моделювання.

Тема 1.2. Загальна характеристика задач математичного програмування

Сутність оптимального вирішення задачі досягнення заданого результату при мінімальній витраті ресурсів або досягнення максимального ефекту при обмежених ресурсах. Критерії оцінки прийнятих рішень, етапи вирішення екстремальних задач. Припустимі й оптимальні рішення.

Класифікація задач математичного програмування та методів їх вирішення. Лінійне і нелінійне програмування. Алгоритми вирішення екстремальних задач і їхні відмінні риси. Поняття про стохастичне, цілочислове та динамічне програмування. Приклади виробничих задач.

Тема 1.3. Транспортна задача. Математичне формулювання та алгоритм вирішення

Змістовна постановка задачі. Математична модель задачі. Теорема про можливість розв'язання транспортної задачі. Особливості вирішення закритої транспортної задачі. Визначення початкового опорного плану транспортної задачі. Метод північно-західного кута. Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі. Умови оптимальності. Поняття циклу і потенціалів у транспортній задачі. Метод потенціалів. Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів на конкретному прикладі.

Тема 1.4. Інформаційні технології вирішення задач математичного програмування

Вибір інформаційної технології вирішення задач математичного програмування. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*. Вбудована програма *Solver*. Представлення вихідних, проміжних і вихідних даних для вирішення транспортної задачі в інформаційній системі *Microsoft Excel*. Приклад вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *MathCAD 2000*.

Тема 1.5. Різновиди транспортної задачі

Цілочислова транспортна задача. Транспортна задача про розподіл випуску продукції. Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів за замовленням споживача. Транспортна задача про закриття підприємства.

Тема 1.6. Задача цілочислового лінійного програмування

Особливості вирішення задачі цілочислового лінійного програмування. Змістовна постановка, математична модель і приклад транспортної задачі про розміщення вантажного флоту. Змістовна постановка, математична модель і приклад транспортної задачі про розвезення вантажу.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тема 2.1. Поняття про системи масового обслуговування та загальна характеристика задач

Теорія масового обслуговування як самостійна наукова дисципліна. Історія розвитку теорії масового обслуговування. Роль теорії масового обслуговування у вирішенні задач підвищення ефективності організації і функціонування виробництва. Особливості задач теорії масового обслуговування. Прикладне значення теорії масового обслуговування. Приклади задач масового обслуговування в житлово-комунальному господарстві.

Тема 2.2. Основні поняття, термінологія і класифікація систем масового обслуговування

Поняття системи масового обслуговування. Складові елементи систем масового обслуговування. Вхідний і вихідний потоки вимог, що обслуговують канали (апарати, пристрої), черга на обслуговування. Різновиди систем масового обслуговування та їх класифікація. Одно- і багатоканальна системи, замкнуті й розімкнуті системи, впорядковані й неупорядковані системи, системи з відмовами та очікуванням, системи з обмеженою і необмеженою довжиною черги. Критерії оцінки якості функціонування систем масового обслуговування.

Тема 2.3. Математико-статистична обробка виробничих даних

Поняття про найпростіший потік вимог. Пуасонівський закон розподілу потоку вимог. Властивості найпростішого потоку вимог: стаціонарність, ординарність і відсутність післядії. Можливість вирішення задач масового обслуговування при недотриманості до властивостей найпростішого потоку вимог. Час між надходженнями вимог, час обслуговування і дослідження законів їх розподілу. Побудова статистичного ряду випадкової величини. Кількісна і якісна оцінка ступеня відповідності теоретичної кривої розподілу до даних експерименту.

Тема 2.4. Показники ефективності систем масового обслуговування

Технічні показники ефективності систем масового обслуговування. Імовірність відмови в обслуговуванні. Середня кількість вимог, що очікують обслуговування. Відносна й абсолютна пропускні спроможності системи. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням. Загальна кількість вимог, що знаходяться в системі. Середній час очікування вимогами початку обслуговування. Економічні показники ефективності систем масового обслуговування.

Тема 2.5. Ланцюги Маркова і рівняння Колмогорова для систем масового обслуговування

Графічна інтепретація математичних моделей систем масового обслуговування. Марковські ланцюги для найбільш поширених систем масового обслуговування. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів системи масового обслуговування. Поняття щільності імовірності переходу з одного стану в інший. Системи рівнянь Колмогорова для несталих і сталих потоків вимог.

Тема 2.6. Розімкнуті системи масового обслуговування

Особливості розімкнутих систем масового обслуговування з необмеженим часом очікування. Умова функціонування системи. Вихідні параметри системи для розрахунку показників системи. Розрахунок показників функціонування системи. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Імовірність появи черги. Середня довжина черги. Середній час очікування обслуговування. Середнє число вільних каналів. Коефіцієнт простою каналу. Приклади вирішення виробничих задач розрахунку показників функціонування системи масового обслуговування . Техніко-економічне обґрунтування ефективності збільшення продуктивності обслуговуючої системи. Комп'ютерний розрахунок показників розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування. Особливості розімкнутої системи масового обслуговування з *обмеженим* часом очікування. Розрахунок показників функціонування системи з обмеженим часом очікування. Приклад розрахунку. Особливості розімкнутої системи масового обслуговування з *обмеженою довжиною черги.* Розрахунок показників функціонування системи з обмеженою довжиною черги. Приклад розрахунку.

Тема 2.7. Замкнуті системи масового обслуговування

Особливості одноканальних замкнутих систем масового обслуговування. Вихідні параметри для розрахунку показників системи. Розрахунок показників функціонування системи. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Коефіцієнт простою каналу. Імовірність зайнятості каналу обслуговування. Математичне очікування числа вимог, що знаходяться в системі. Коефіцієнта простою об'єкта. Середня довжина черги. Коефіцієнт простою об'єктів в очікуванні обслуговування. Середній час очікуванні обслуговування. Приклади розрахунку. Комп'ютерний розрахунок показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі та комп'ютерні технології розрахунку параметрів функціонування за допомогою системи *MathCAD 2000*. Аналіз результатів розрахунку. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в сталому режимі. Комп'ютерний розрахунок показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в сталому режимі. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи *MathCAD 2000*. Аналіз результатів розрахунку.

Тема 2.8. Системи масового обслуговування з відмовами

Особливості одноканальної системи масового обслуговування з відмовами й основні показники її функціонування. Розрахунок показників. Коефіцієнт завантаження. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Коефіцієнт простою каналу. Абсолютна продуктивність системи. Імовірність відмови в обслуговуванні. Приклади розрахунку показників. Особливості багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами. Традиційні і комп'ютерні технології розрахунку показників багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами. Дослідження математичних моделей багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*.

Розділ 1. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 1.1. Економічні передумови постановки і вирішення задач математичного програмування

На якому рівні не знаходилося суспільне виробництво, які великі не були трудові, матеріальні й фінансові ресурси, перед господарськими керівниками завжди стоїть завдання найкращого використання виробничих ресурсів і потужностей.

Окремим галузям народного господарства, виробничим об'єднанням, підприємствам і їхнім структурним підрозділам надана можливість самостійно вирішувати питання раціонального використання виділених ресурсів для досягнення своїх виробничих цілей. У межах установлених нормативів, лімітів і прав виробничі об'єднання і підприємства можуть маневрувати наявними ресурсами, приймати важливі економічні й виробничі рішення, від яких залежить використання устаткування, продуктивність праці, собівартість і якість продукції, а також всі інші показники виробничо-господарської діяльності.

Уперше подібна задача у вигляді пропозиції щодо укладання національного плану перевезень, що дозволяє мінімізувати сумарний кілометраж, подана в роботі радянського економіста Л.М.Толстого (1930 р.). Екстремальна задача з мінімізації транспортних витрат була ним сформульована в 1939 р.

Одну з різновидів транспортної задачі в 1941 р. поставив американець Хічкок (проблема Хічкока). Але закінченого методу вирішення цієї задачі він не розробив.

У загальному вигляді задача математичного програмування сформульована в 1939 р. Л.В.Канторовичем. Він же запропонував метод множників, що дозволяє її вирішувати. Разом із М.К.Гавуриним у 1949 р. Л.В.Канторович розробив метод потенціалів, який і дотепер є найбільш поширеним методом вирішення транспортних задач.

Широко відомий метод вирішення задачі лінійного програмування – симплексний метод – був опублікований Д.Б.Данцигом у 1949 р. Вдалою модифікацією симплексного методу є диференціальний алгоритм, що логічно випливає з диференціального алгоритму вирішення загальної задачі математичного програмування. Цей метод протягом останніх десятиліть (з 1978 р.) успішно викладається професорами А.Г.Евдокимовим і М.І.Самойленко в Харківській національній академії міського господарства.

Застосування математичних методів в економіці на першому етапі ознаменувалося досить гострою дискусією економістів "традиційної" школи та економістів нового покоління. Однак тепер мало залишилося економістів, які б прямо заперечували проти необхідності використання ефективних математичних методів при вирішенні таких важливих проблем, як:

ціноутворення;

дослідження міжгалузевих зв'язків;

підвищення ефективності капітальних вкладень;

використання обмежених ресурсів;

розміщення продуктивних сил;

обґрунтування нормативів на витрати матеріалів і оборотних коштів та багато інших, не менш важливих, задач економіки та менеджменту.

Зважаючи на те, що гігантський господарський механізм України виробляє більш 15 *млн.* найменувань різної продукції, стає очевидним утопічність всебічної багатокритеріальної оптимізації народногосподарського плану. Управляти такою масою господарських підрозділів можна тільки за допомогою багаторівневої структури управління: центральні органи, галузеві, виробничо-територіальні об'єднання та окремі підприємства.

З вищевказаних причин на рівні народного господарства переважно використовуються неформальні методи оптимального планування із залученням для вирішення часткових питань економіко-математичних методів і електронно-обчислювальної техніки.

Основними економічними передумовами постановки і вирішення задач методами математичного програмування слід вважати:

органічне сполучення централізованого народногосподарського планування із самостійністю підприємств, виробничих об'єднань і галузей економіки;

наявність декількох або багатьох можливих (альтернативних припустимих, але не рівнозначних) варіантів використання обмежених ресурсів і виробничих потужностей;

широке використання економіко-математичних методів у сполученні із сучасними засобами електронно-обчислювальної техніки;

можливість одержання необхідної і достовірної виробничо-економічної інформації;

достатньо повна теоретична розробка методів вирішення задач математичного програмування.

Тема 1.2. Загальна характеристика задач математичного програмування

Математичне програмування як прикладний розділ вищої математики відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців економічного профілю. Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє вирішувати оптимальним способом багато виробничих задач організації, планування і управління. Іншими словами, інженер-економіст має надійний інструмент для одержання найвищого економічного ефекту в конкретних виробничих умовах.

Вираз "*математичне програмування*" слід розуміти як ітераційний пошук найкращого варіанта використання обмежених виробничих потужностей і ресурсів для досягнення поставлених цілей.

Прикладами, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання методів математичного програмування, можуть бути наступні економічні задачі (подаються в змістовній постановці):

одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових та інших витратах;

забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових вкладеннях або мінімальній витраті якогось виробничого ресурсу;

досягнення мінімального терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних та ін.);

забезпечення мінімальної собівартості продукції при заданих виробничих ресурсах.

У наведених прикладах максимальний випуск продукції, максимальний прибуток, мінімальні фінансові вкладення, максимально короткий термін – це є шукані *оптимуми* (*максимуми* або *мінімуми*). У математиці максимум і мінімум мають ще одну назву – е*кстремум*, а задачі пошуку екстремуму називають *екстремальними задачами.*

У наведених прикладах умови, що накладаються на вирішення задачі (задані матеріальні, трудові й тимчасові витрати; планові показники; виробничі ресурси), називають *обмеженнями* задачі.

Обмеження задачі визначають *область припустимих рішень.*

Ті припустимі рішення, при яких досягається оптимум, називають *оптимальними,* або *екстремальними рішеннями.*

У загальному випадку екстремальна задача може мати одне, декілька, безліч, нескінченну безліч або жодне оптимальне рішення.

У практиці інженера-економіста оптимальне рішення прийнято називати *оптимальним планом*.

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої *математичної моделі*. У противному разі необхідно пройти досить трудомісткі й копіткі процедури математичного моделювання й ідентифікації виробничих процесів, що у даному курсі не розглядаються.

У загальному вигляді екстремальна задача формулюється наступним чином: знайти найбільше (максимальне) або найменше (мінімальне) значення деякої функції $Y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при умовах $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq b_i \;\; (i = \overline{1, m})$, де y і f_i – задані функції, а b_i – дійсне число.

Наведене формулювання є узагальненням постановок ряду часткових задач математичного програмування, що можуть розрізнятися між собою як видом функцій y і f_i (лінійні, нелінійні, стохастичні), так і характером (дискретний, неперервний) змінних .

Функцію $Y(x_1, x_2, ..., x_n)$, яку мінімізують або максимізують, називають *цільовою* функцією.

Залежно від особливостей функцій y і f_i математичне програмування можна розподілити на ряд самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи вирішення окремих класів екстремальних задач. Насамперед, задачі математичного програмування розподіляються на задачі *лінійного* і *нелінійного програмування*. При цьому якщо усі функції y і f_i є лінійними, то відповідна задача відноситься до класу задач лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна із зазначених функцій є нелінійною, то відповідна задача належить до класу задач нелінійного програмування.

Лінійне програмування є найбільш вивченим розділом математичного програмування. Для вирішення задач лінійного програмування розроблено багато ефективних методів.

Найбільш універсальним методом є диференціальний алгоритм, що логічно випливає з диференціального алгоритму загальної задачі математичного програмування. Диференціальний алгоритм, як і широко відомий симплекс-метод, дозволяє вирішувати будь-які задачі лінійного програмування. Однак для деяких класів задач лінійного програмування доцільно використовувати більш прості методи. Так, для вирішення задач із кількістю змінних, рівною двом, використовують *графічний метод*, що відзначається простотою і наочністю, але потребує графічних побудов. Для вирішення задач лінійного програмування, відомих як *транспортні*, використовують *метод потенціалів*.

Методичною основою обчислювальних процедур будь-якого методу є принцип аналізу і послідовного поліпшення деякого початкового плану розподілу і використання ресурсів. План поліпшують доти, поки не буде знайдений найкращий (оптимальний) варіант. Іншими словами, спочатку складається деякий початковий план, що аналізується за конкретними строго розробленими правилами. На підставі аналізу визначаються можливість і напрямок поліпшення початкового варіанта плану. Потім обчислюється новий план, що піддається такому ж аналізу і подальшому поліпшенню, тобто наближенню до оптимуму. Обчислювальний процес продовжується доти, поки аналіз не покаже неможливість дальшого поліпшення.

Уведення нелінійних співвідношень у систему обмежень або в цільову функцію (або в те й інше разом) обумовлює необхідність формулювання і вирішення задач методами нелінійного програмування. Поки відсутні загальні, універсальні методи вирішення такого класу екстремальних задач, оскільки нелінійність часто призводить до багатоекстремальності цільової функції.

Серед задач нелінійного програмування найбільш глибоко вивчені задачі *опуклого програмування*. Це задачі, в результаті вирішення яких визначається екстремум опуклої функції, заданої на опуклій замкнутій множині. Задача опуклого програмування має один явний екстремум.

У свою чергу, серед задач опуклого програмування більш докладно досліджені задачі *квадратичного програмування*. У результаті вирішення таких задач потрібно в загальному випадку знайти екстремум квадратичної функції при обмеженнях на змінні у вигляді системи лінійних рівнянь або лінійних нерівностей.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі *цілочислового, параметричного* і *дрібно-лінійного програмування*.

У задачах цілочислового, або *дискретного* програмування частина або всі невідомі можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції обмежень, що визначають область можливих змін змінних, (або і те і інше) залежать від деяких параметрів.

У задачах дрібно-лінійного програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, також є лінійними.

Особливі класи становлять задачі *стохастичного* і *динамічного програмування.*

Стохастичне програмування використовують для вирішення задач, в яких обмеження мають імовірний, випадковий характер, тобто необхідно враховувати вплив яких-небудь непередбачених обставин. Як цільова функція в задачах стохастичного програмування може служити математичне очікування деякого виробничого показника.

До задач такого типу відносяться:

комплектування ремонтних підприємств устаткуванням, коли заздалегідь невідомий обсяг робіт;

визначення необхідної кількості транспортних засобів на пасажирських маршрутах, коли обсяг перевезень має випадковий характер;

визначення запасів деяких ресурсів, коли його постачання має випадковий характер.

За допомогою лінійного, нелінійного, цілочислового і стохастичного програмування вирішуються задачі, що зводяться до відшукання оптимального рішення без урахування можливої динаміки виробничого процесу, тобто без урахування чинника часу.

У динамічному програмуванні мають місце багатоетапні задачі, що вимагають оптимізації прийнятих рішень не як одиничного акту, а з урахуванням розвитку явища, його зміни в часі.

Переваги динамічного програмування:

можливість поетапного аналізу результатів у процесі вирішення задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням чинника часу;

поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження природи економічних процесів;

більш об'єктивне, повне і точне вирішення планово-економічних і виробничих завдань.

Таким чином, *математичне програмування* являє собою математичну дисципліну, що досліджує екстремальні задачі і розробляє методи їх вирішення. Математичне програмування як наука знаходиться в процесі постійного розвитку. Вченими всього світу розроблено багато методів для вирішення різних класів задач математичного програмування. Разом з тим багато задач ще не мають ефективних методів вирішення і чекають своїх дослідників.

Вирішення екстремальної економічної задачі складається з наступних етапів:

побудови економіко-математичної моделі, тобто обґрунтування критерію оптимізації, виявлення і формалізації у вигляді системи рівнянь або нерівностей найбільш істотних обмежень задачі;

вибору математичного методу, що дозволяє за кінцеве число кроків одержати шукане рішення з будь-якою заздалегідь заданою точністю, або вибору відповідної комп'ютерної технології;

знаходження оптимального плану й аналізу отриманих результатів з позицій можливого їхнього практичного застосування, оскільки в економіко-математичній моделі розв'язуваного завдання враховуються тільки найбільш істотні зв'язки і залежності, а не всі, що мають місце в реальному виробництві.

З погляду економіста *оптимальним* називається такий план виробництва, що є найкращим з позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використання виробничого потенціалу і наявних ресурсів.

Критерієм оптимальності називається показник, за яким оцінюється міра ефективності плану. Критерій оптимальності повинен бути однозначним і мати кількісний вираз.

З усієї різноманітності задач математичного програмування в інженерній практиці економістів, фінансистів і менеджерів найбільш часто зустрічаються задачі лінійного програмування. Тому розглянемо їх більш докладно.

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: *знайти оптимум лінійної функції* $y(\mathbf{x})$*, якщо на змінні задачі накладені лінійні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.*

Аналітичний запис цього завдання має такий вигляд:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \underset{\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}} , \tag{1.1}$$

$$\Omega: \quad \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \le 0 ; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2 = 0 ; \tag{1.3}$$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{b}_3 \ge 0 ; \tag{1.4}$$

$$\mathbf{x} \ge 0 , \tag{1.5}$$

де $\mathbf{x}$ – n-мірний вектор дійсних змінних; $\mathbf{c}$ – n-мірний вектор коефіцієнтів; c_0 – вільний член у складі функції y; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n,\quad m_2 \times n,\quad m_3 \times n$ відповідно, $m_2 < n$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1,\quad m_2 \times 1,\quad m_3 \times 1$ відповідно.

Часткові задачі лінійного програмування можуть не містити однієї або двох систем обмежень типу (1.2) – (1.4), все рівно яких. Крім того, замість умови невід'ємності (1.5) може мати місце двостороння або одностороння обмеженість змінних.

Задачу, складену з (1.1), (1.2) і (1.5), називають *стандартною* задачею лінійного програмування.

Канонічна, або *основна* задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \max_{\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n} ; \tag{1.6}$$

$$\Omega: \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 ; \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x} \ge 0, \tag{1.8}$$

де $\mathbf{A}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\mathbf{b}$ – вектори вільних членів розмірності $m \times 1$.

Очевидно, що обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а кожне обмеження-нерівність типу "$\ge$" – в обмеження-рівність шляхом вирахуванням з його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Задачу мінімізації лінійної функції y можна звести до задачі максимізації шляхом множення останньої на -1 . Таким чином, задачу лінійної оптимізації (1.1) – (1.5) завжди можна перетворити в задачу (1.6) – (1.8) і навпаки.

Складання математичної моделі загальної задачі математичного програмування або її канонічної форми вимагає певних зусиль і кмітливості. Але досвід складання математичних моделей швидко накопичується. Досить мати практику вирішення декількох задач, щоб надалі не мати особливих труднощів при переході від змістовної постановки задачі лінійного програмування до формальної (аналітичної).

Вирішення задачі лінійного програмування за допомогою диференціального алгоритму докладно розглядається в курсі «Математичне програмування». Незважаючи на те, що диференціальний алгоритм є універсальним, його використання не завжди виправдане. Розглянемо класи задач, що мають лінійні моделі, але вирішення яких доцільно здійснювати не за диференціальним алгоритмом. Це насамперед *транспортна задача* і задача *цілочислового лінійного програмування.*

Тема 1.3. Транспортна задача. Математичне формулювання і алгоритм вирішення

1.3.1. Змістовна постановка задачі

Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях a_1, a_2, … a_m одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний із n пунктів призначення в кількості b_1, b_2, … b_n одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} – кількість продукту, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких розмірів x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість (відстань) перевезень була б мінімальною.

1.3.2. Математична модель задачі

Позначимо:

c_{ij} – тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з i–го пункту відправлення в j–й пункт призначення;

a_j – запаси вантажу в i–му пункті відправлення;

$\boldsymbol{b_i}$ – потреба у вантажі в $\boldsymbol{j}$–му пункті призначення;

$\boldsymbol{x_{ij}}$ – кількість одиниць вантажу, перевезеного з $\boldsymbol{i}$–го пункту відправлення в $\boldsymbol{j}$–й пункт призначення.

Тоді математична модель транспортної задачі про планування перевезень має такий вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega} \; ; \qquad (1.9)$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} \; ; \qquad (1.10)$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} \; ; \qquad (1.11)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m} \; . \qquad (1.12)$$

Тут (1.9) – цільова функція, що визначає вартість перевезень усього вантажу. Саме екстремальне (мінімальне) значення цієї функції необхідно знайти в задачі. Причому значення змінних $\boldsymbol{x_{ij}}$, при яких цільова функція досягає свого мінімуму, повинні належати області припустимих рішень Ω.

Вирази (1.10) – (1.12) визначають область припустимих рішень Ω. При цьому вираз (1.10) відбиває потреби у вантажі в пунктах призначення, вираз (1.11) визначає запаси вантажів у пунктах відправлення, а вираз (1.12) відокремлює негативну область значень $\boldsymbol{x_{ij}}$, в яку дані змінні не можуть потрапляти за своїм фізичним змістом.

Вирази (1.10) – (1.12) називаються обмеженнями задачі лінійного програмування. Вирішення задачі (частковий набір значень змінних $\boldsymbol{x_i}$) називається припустимим, якщо воно одночасно задовольняє всім обмеженням задачі. Вирішення задачі називається оптимальним, якщо воно забезпечує оптимум (у даному випадку мінімум) функції цілі.

Вважатимемо, що функції $y, f_1, f_{2,\ldots} f_n$ – неперервні лінійні функції, задані на невід'ємному ортанті евклідового простору $\mathbf{R}^n$. Дані функції мають місце, коли перевезений вантаж є рідиною, сипкою речовиною, дрібними заготівлями або дрібною неспакованою продукцією. Такий вантаж характеризується параметрами, що являють собою вагу, довжину (погонні метри), площу (квадратні метри), об'єм і т.п.

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \tag{1.13}$$

то модель такої транспортної задачі називається закритою. У протилежному випадку – відкритою.

Теорема 1.1. Для можливості розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність (1.13).

У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний (n+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i,n+1} = 0$ ($i = \overline{1,m}$). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (1.13) виконується.

Аналогічно, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний (m+1)-й пункт відправлення з запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (1.13) виконується.

Далі будемо розглядати закриту модель транспортної задачі. Якщо ж модель конкретної задачі є відкритою, то, виходячи зі сказаного вище, її необхідно перетворити так, щоб виконувалася рівність (1.13).

У відкритій моделі область припустимих значень (за інших рівних умов) значно ширше, тому цільова функція досягає кращих значень або, принаймні, не гірше.

1.3.3. Особливості вирішення закритої транспортної задачі

Визначення 1.1. Усяке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (1.10) і (1.11) , що обумовлене матрицею **X**=$\{x_{ij}]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, називається *планом* транспортної задачі.

Визначення 1.2. План $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при якому функція (1.9) приймає своє мінімальне значення, називається *оптимальним планом* транспортної задачі.

Число перемінних x_{ij} у транспортній задачі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення дорівнює mn, а число рівнянь у системах (1.10) і (1.11) дорівнює $m+n$. Оскільки передбачається, що виконується умова (1.13), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m+n-1$. Отже, опорний план транспортної задачі може мати не більше $m+n-1$ відмінних від нуля невідомих.

Визначення 1.3. План $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ *є опорним невиродженим,* якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше – то *виродженим*.

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Один з них – метод північно-західного кута – буде розглянутий нижче.

Як і для всякої задачі лінійного програмування, оптимальний план транспортної задачі є також опорним планом. Для визначення оптимального плану транспортної задачі можна використовувати диференціальний алгоритм, симплекс-метод та інші універсальні методи. Однак через виняткову практичну важливість цієї задачі і специфіку її обмежень (кожна невідома входить лише в два рівняння систем (1.10) і (1.11), а коефіцієнти при невідомих дорівнюють одиниці) для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблені спеціальні методи. Один з них – метод потенціалів – розглядається в даному курсі.

За звичаєм вихідні дані транспортної задачі записують у вигляді табл.1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані транспортної завдання

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення					
		1	2	…	j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

1.3.4. Визначення початкового опорного плану транспортної задачі

Вирішення транспортної задачі починають із знаходження якого-небудь опорного плану. Для цього розроблені специфічні методи. Один з них одержав у літературі назву "*метод північно-західного кута*". Іноді його називають також "*діагональним методом*", "*методом перехідних приступів*" і т. ін.

Сутність методу полягає в тому, що опорний план знаходять за $m+n-1$ кроками, на кожному з яких у таблиці транспортної задачі заповнюють одну клітку. Заповнення однієї клітки забезпечує цілком або задоволення потреби у вантажі одного з пунктів призначення (відповідно до того, в стовпці якого знаходиться клітка), або вивіз вантажу з одного з пунктів відправлення (відповідно з того, в рядку якого знаходиться клітка).

Заповнення таблиці слід починати з лівого верхнього квадрата (північно-західного кута). З позиції цього квадрата порівнюють запас вантажу в першому пункті відправлення з потребою першого пункту призначення. Вибирають менший розмір і записують у даний квадрат, який з цього моменту стає "*зайнятим*". Якщо в клітку записується потреба пункту призначення, то з подальшого розгляду виключають відповідний стовпець таблиці і переходять у ліву сусідню клітку. Якщо в клітку записується запас пункту відправлення, то з подальшого розгляду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню ду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої.

У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюють процедуру першого кроку з урахуванням зміни запасу вантажу одного з відправників або потреби у вантажі одного з одержувачів у результаті попереднього кроку.

Після $m+n-2$ описаних вище кроків одержують задачу з одним пунктом відправлення і одним пунктом призначення. При цьому залишається вільною тільки одна клітка, а запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнення цієї клітки, тобто здійснення ($m+n-1$)-го кроку приводить до шуканого опорного плану.

Алгоритм методу північно-західного кута у вигляді блок-схеми зображений на рис.2.1.

В алгоритмі визначення початкового опорного плану вихідними даними є:

m – число пунктів відправлення;

n – число пунктів призначення;

$\mathbf{a} = [a_i]$ – одномірний масив чисел, що визначають запаси вантажу в пунктах відправлення;

$\mathbf{b} = [b_j]$ – одномірний масив чисел, що визначають запаси вантажу в пунктах відправлення.

Єдиним кінцевим даним в алгоритмі є двомірний масив $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, що безпосередньо визначає початковий опорний план транспортної задачі.

Призначення блоків схеми алгоритму:

блоки 2–5 – перевірка умови можливості розв'язання задачі: чи є математична модель транспортної задачі закритою;

блок 6 – видача повідомлення про порушення умови можливості розв'язання завдання, тобто про необхідність приведення відкритої математичної моделі до закритої;

блоки 7–9 – подвійний цикл підготовки масиву **B**;

блок 10 – надання початкових значень змінним Δa і Δb;

блок 11 – надання початкових значень індексам елементів масиву **X**;

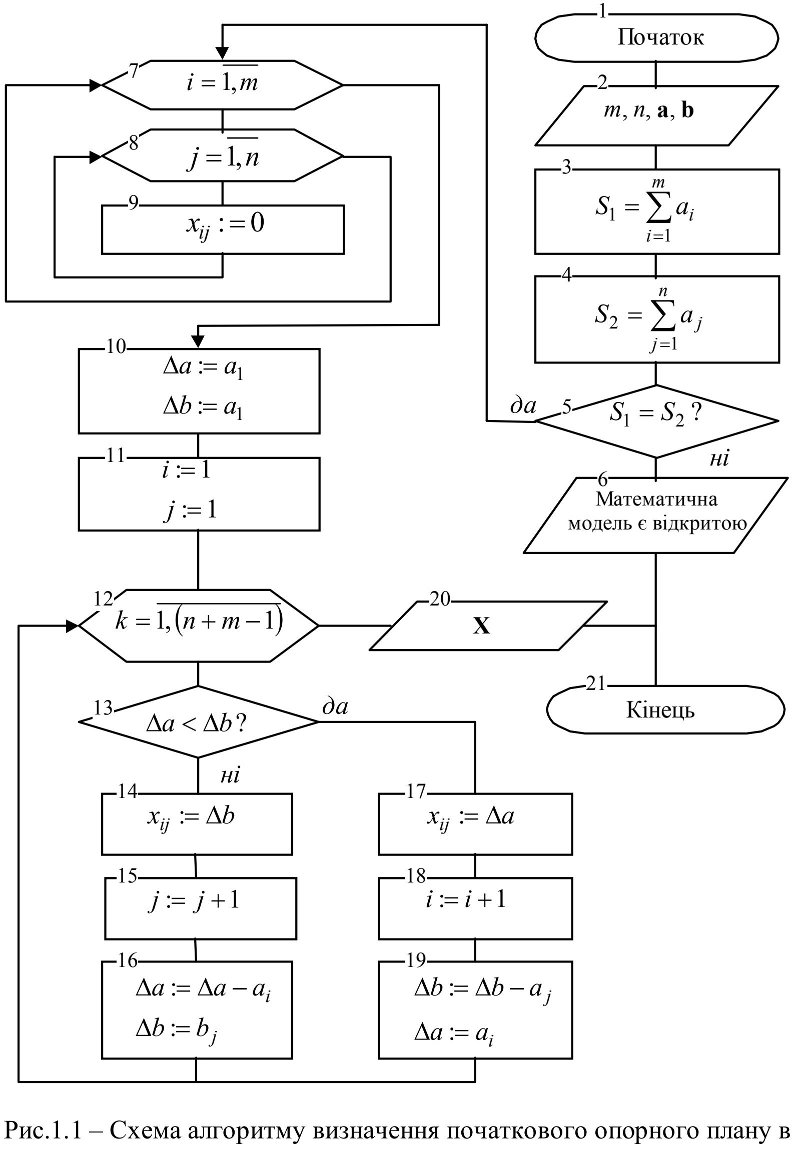


Рис.1.1 – Схема алгоритму визначення початкового опорного плану в транспортній задачі методом північно-західного кута

блоки 12-19 – безпосереднє формування початкового опорного плану;

блок 20 – вивід результату.

Слід зауважити, що на деякому кроці (але не на останньому) може трапитися, що потреби у вантажі чергового пункту призначення рівні запасам чергового пункту відправлення. У цьому випадку з подальшого розгляду виключають або стовпець, або рядок, тобто тільки що-небудь одне. Таким чином, запаси відповідного пункту відправлення, або потребу відповідного пункту призначення вважають рівними нулю. Цей нуль записують у чергову клітку, яка заповнюється.

Зазначені вище умови гарантують одержання $m+n-1$ зайнятих кліток, у яких знаходяться компоненти опорного плану.

Опорний план перевезень повинен відповідати таким вимогам:

по-перше, кількість зайнятих маршрутів (кліток) повинно бути на одиницю менше суми числа постачальників m і числа споживачів n, тобто повинна дорівнювати значенню $m+n-1$;

по-друге, не повинно бути жодного зайнятого маршруту (клітки), що опинився б єдиним і в рядку, і в стовпці таблиці.

1.3.5. Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі

Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Найбільш часто *використовується метод потенціалів.* Метод припускає, що вже відомий якийсь опорний план. Його можна одержати, наприклад, розглянутим методом північно-західного кута. Вихідний опорний план необхідно перевірити на оптимальність.

Теорема 1.2. Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ транспортної задачі з заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа α_i $(i=\overline{1,m})$ і β_j $(j=\overline{1,n})$, що

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} > 0 \qquad (1.14)$$

$$\text{і} \quad \beta_i - \alpha_j \le c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} = 0 \qquad (1.15)$$

для всіх $i=\overline{1,m}$ і $j=\overline{1,n}$, то $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$ – оптимальний план.

Визначення 1.4. Числа $\alpha_i \ (i = \overline{1, m})$ і $\beta_j \ (j = \overline{1, n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення.

Теорема 1.2 дозволяє побудувати алгоритм знаходження рішення транспортної задачі. Він являє собою наступне.

Нехай знайдений опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів відправлення і призначення визначають потенціали $\alpha_i \ (i = \overline{1, m})$ і $\beta_j \ (j = \overline{1, n})$ із системи рівнянь

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \ . \tag{1.16}$$

Тому що число заповнених кліток дорівнює $n+m-1$, то система (1.16) із $n+m$ невідомими містить $n+m-1$ рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне з невідомих потрібно взяти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1 = 0$, і знайти послідовно із системи (1.16) значення інших невідомих.

Після того, як усі потенціали знайдені, для кожною з вільних кліток визначають числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$. Якщо серед чисел α_{ij} немає позитивних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітки $\alpha_{ij} > 0$, то опорний план , що перевіряється , не є оптимальним, і треба перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають усі вільні клітки, для яких $\alpha_{ij} > 0$, і вибирають ту, для якої число α_{ij} максимальне. Обрану клітку необхідно заповнити.

Заповнюючи обрану клітку, треба змінити обсяги перевезень, записаних у ряді інших зайнятих клітках і зв'язаних з обраною *циклом*.

Визначення 1.5. Циклом у таблиці транспортної задачі називається замкнута ломана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітках таблиці, а ланки – уздовж рядків і стовпів, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша – у стовпці.

Якщо ломана лінія, що складає цикл, перетинається сама із собою, то точка самоперетину не є вершиною. Приклади можливих циклів показані на рис.1.2.

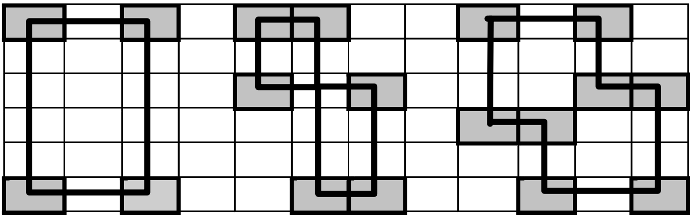


Рис.1.2

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати тільки один цикл. Після того як для обраної вільної клітки він побудований, необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього треба перемістити вантажі в межах кліток, що утворюють цикл. Переміщення роблять за такими правилами:

кожній з кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, приписують знак “+” або “–“, причому вільній клітці – знак плюс , а всім іншим кліткам – по черзі знаки мінус і плюс;

у вільну клітку переносять менше з чисел x_{ij} , що знаходяться в мінусових клітках, і одночасно це число додають до відповідних чисел, що знаходяться “плюсових” клітках, і віднімають із чисел, що знаходяться в “мінусових” клітках. Клітка, що раніше була вільною, стає зайнятою, а “мінусова” клітка, в якій стояло мінімальне число x_{ij} , стає вільною.

У результаті зазначених вище переміщень вантажів у межах кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, визначають новий опорний план транспортної задачі. Число зайнятих кліток залишається рівним n+m–1. Якщо в зайнятих “мінусових” клітках циклу є два і більше однакових мінімальних чисел x_{ij} , то звільняють тільки одну з таких кліток, а інші залишають зайнятими з нульовими постачаннями.

Отриманий новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів відправлення і призначення і знаходять числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$ для всіх вільних кліток. Якщо серед цих чисел не буде позитивних, то це означає, що новий опорний план є оптимальним. Якщо ж є позитивні числа, то необхідно перейти до нового опорного плану. У результаті ітераційного процесу після кінцевого числа переходів одержують оптимальний план задачі.

Таким чином, процес знаходження рішення транспортної задачі методом потенціалів включає наступні етапи:

1-й етап. Знаходять опорний план.

2-й етап. Знаходять потенціали пунктів відправлення і призначення.

3-й етап. Визначають числа α_{ij} для кожної вільної клітки. Якщо серед них немає позитивних, то отримано оптимальний план транспортної задачі, у противному разі переходять до нового опорного плану.

4-й етап. Вибирають серед позитивних чисел α_{ij} максимальне, будують для відповідної вільної клітки цикл перерахування і роблять зсув за циклом, одержуючи при цьому новий опорний план. Далі переходять до 2-го етапу.

Розглянемо приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів.

1.3.6. Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів

Приклад 1.1. Три заводи, що виготовляють бетоні конструкції, постачаються цементом з чотирьох складів. Попит заводів b_j відповідно дорівнює 280, 90 і 180 *тис.т/міс.* Пропускна здатність складів a_i відповідно становить 200, 150, 80 і 120 *тис.т/міс.* Відстані перевезень (у *км*) із i-го складу на j-й завод подані в матриці

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Потрібно скласти план перевезень цементу зі складів на заводи, що задовольняв би пропускним спроможностям складів і потребам заводу, а сумарний пробіг вантажного транспорту був би мінімальним.

Вирішення. Позначимо через x_{ij} – кількість цементу, який щомісяця потрібно доставляти на j–й завод з i–го складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$y = x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 2x_{31} + 7x_{32} +$$

$$+ 4x_{33} + 4x_{41} + x_{42} + 11x_{43} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}; \qquad (1.17)$$

$$\Omega: \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 280; \qquad (1.18)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 90; \qquad (1.19)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 180; \qquad (1.20)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200; \qquad (1.21)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150; \qquad (1.22)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80; \qquad (1.23)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 120; \qquad (1.24)$$

$$x_{ij} \ge 0. \qquad (1.25)$$

Тут (1.17) – цільова функція, (1.18) – (1.20) – обмеження задачі, що визначають місячні запаси цементу на складах, (1.21) – (1.24) – обмеження задачі, що визначають місячну потребу в цементі на заводах, (1.25) – обмеження, що визначає неможливість негативних значень для постачань цементу на заводи.

1-й крок. *1-й етап.* Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі (1.17) – (1.25).

Відповідно до цього методу заповнюємо таблицю, починаючи з лівого верхнього квадрата. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення (200 *тис.т/міс*.) із потребою першого пункту призначення (280 *тис.т/міс.*). Вибираємо меншу величину (200) і записуємо її в даний квадрат. Оскільки весь запас у першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої. У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення верхньої лівої клітки, але з урахуванням того, що потреба першого пункту призначення зменшилася на *200 тис.т/міс.* і стала рівною 80 *тис.т/міс.* Тобто порівнюємо запас другого пункту відправлення (150 *тис.т/міс*.) із новою потребою першого пункту призначення (80 *тис.т/міс.*). Вибираємо меншу величину(80) і записуємо її в нову клітку. Оскільки потреба у вантажі в першому пункті призначення повністю задоволена, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться справа від тільки що заповненої. Для нової верхньої лівої клітки частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення з урахуванням зміни запасу в другому пункті відправлення на *80 тис.т/міс.* І так доти, поки не буде заповнено $m+n-2$ кліток.

Остання ($m+n-2$)-я клітка заповнюється механічно – у неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 120. Усі проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$ відображені в табл. 1.2. Ці результати в таблиці виділені напівжирним шрифтом.

Для початкового опорного плану обчислюємо значення цільової функції (1.17):

$$y_0 = 1\cdot 200 + 6\cdot 80 + 8\cdot 70 + 7\cdot 20 + 4\cdot 60 + 11\cdot 120 = 2940 \text{ \textit{тис.т/міс.}}$$

Це значення буде використано на наступних кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинно послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Таблиця 1.2

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 **200**	5	3	0
2	150	6 **80**	8 **70**	9	-5
3	80	2	7 – **20**	4 + **60**	-4
4	120	4	1 +	11 – **120**	-11
Потенціал пункту призначення β_j		1	3	0	

<u>*2-й етап.*</u> Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність. У зв'язку з цим знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення із системи

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 6 \quad , \qquad \beta_2 - \alpha_3 = 7\,,$$

$\beta_3 - \alpha_4 = 11$, що містить шість рівнянь із сімома невідомими. Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = -4$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_3 = -11$. Записуємо знайдені потенціали в табл.1.2.

<u>*3-й етап.*</u> Для кожної вільної клітки обчислюємо числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = -3$, $\alpha_{23} = -4$, $\alpha_{31} = 3$, $\alpha_{41} = 8$, $\alpha_{42} = 13$.

Записуємо знайдені числа у відповідні вільні клітки табл.1.2 і вміщуємо їх у рамочки, щоб відрізняти їх від іншої інформації в таблиці. Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план $\mathbf{X}_0$ не є ці. Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план $\mathbf{X}_0$ не є оптимальним.

<u>*4-й етап.*</u> Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: $\alpha_{42} = 13$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.2 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо знаками «–» і «+» по черзі інші клітки циклу, слідуючи уздовж ломаної лінії циклу.

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{32} (20). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{42} =20, x_{43} =120-20=100, x_{33} =60+20=80.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 100 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 2680 *тис.т/міс.*, що менше вихідного значення 2940 *тис.т/міс.*

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.3) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо таку систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$
$$\beta_1 - \alpha_2 = 6\,, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11$$

.

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_3 = 13$, $\alpha_3 = 9$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$, $\alpha_{31} = -10$, $\alpha_{32} = -13$, $\alpha_{41} = -5$.

Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні ($\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$) , то опорний план $\mathbf{X}_1$ не є оптимальним.

Таблиця 1.3

<table>
<tr><td rowspan="4">Пункт відправлення</td><td rowspan="4">Запас вантажу</td><td colspan="3">Пункт призначення</td><td rowspan="4">Потенціал пункту відправлення α_i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Потреба</td></tr>
<tr><td>280</td><td>90</td><td>180</td></tr>
<tr><td>1</td><td>200</td><td>1 – 200</td><td>5</td><td>3 +</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>150</td><td>6 + 80</td><td>8 – 70</td><td>9</td><td>-5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>80</td><td>2</td><td>7</td><td>4 80</td><td>9</td></tr>
<tr><td>4</td><td>120</td><td>4</td><td>1 + 20</td><td>11 – 100</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Потенціал пункту призначення β_j</td><td>1</td><td>3</td><td>13</td><td></td></tr>
</table>

Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: $\alpha_{13} = 10$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.3 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+».

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{23} (70). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} =200–70=130, x_{13} =70, x_{21} =80+70=150, x_{42} =20+70=90, x_{43} =100–70=30.

У результаті виконаних перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 130 & 0 & 70 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 90 & 30 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 1980 *тис.т/міс.*, що значно менше попереднього значення 2680 *тис.т/міс.*

3-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.4) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11.$$

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -8$, $\beta_2 = -7$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -12$, $\alpha_{22} = -10$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = -1$, $\alpha_{32} = -14$, $\alpha_{41} = 5$. Оскільки серед чисел α_{ij} одне позитивне ($\alpha_{41} = 5$), то опорний план $\mathbf{X}_2$ не є оптимальним.

Таблиця 1.4

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 – **130**	5	3 + **70**	0
2	150	6 **150**	8	9	–5
3	80	2	7	4 **80**	0
4	120	4 +	1 **90**	11 – **30**	–8
Потенціал пункту призначення β_j		1	–7	3	

Для відповідної вільної клітки (нижньої, лівої) будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.4 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+». Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{43} (30). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} =130–30=100, x_{13} =70+30=100, x_{14} =30.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 30 & 90 & 0 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 1830 *тис.т/міс.*, що менше попереднього значення 1980 *тис.т/міс.*

4-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.5) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6\,, \qquad \beta_1 - \alpha_4 = 4\,,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3\,, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4\,, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1\,.$$

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -3$, $\beta_2 = -2$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -7$, $\alpha_{22} = -4$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{41} = -5$. Тому що серед чисел α_{ij} немає строго позитивних, то опорний план $\mathbf{X}_3$ є оптимальним.

Таблиця 1.5

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 **100**	5	3 **100**	0
2	150	6	8	9	–5

		150			
3	80	2	7	4 **80**	–1
4	120	4 **30**	1 **90**	11	–3
Потенціал пункту призначення β_j		1	–2	3	

Тема 1.4. Інформаційні технології вирішення задач математичного програмування

1.4.1. Вибір інформаційної технології вирішення задач математичного програмування

Вирішення будь-якої задачі математичного програмування традиційним ручним способом (без залучення засобів обчислювальної техніки) потребує від економістів і менеджерів великих затрат сил і часу для здійснення ітераційних процесів наближення до оптимуму. Використання мікрокалькуляторів може значно прискорити процес вирішення, але все рівно не може гарантувати швидкого і надійного відшукання рішення. Ситуація різко змінюється, якщо для вирішення задач математичного програмування використовувати сучасні інформаційні технології. Існує ряд потужних інформаційних систем, що значно знижують ризик одержання помилкового результату і на декілька порядків скорочують час вирішення задач.

Використання сучасних інформаційних систем для вирішення задачі математичного програмування потребує від користувачів тільки правильного укладання математичної моделі задачі і її введення в комп'ютер. Якщо раніше економісту треба було детально володіти методами вирішення різних класів екстремальних задач, то тепер він може не обтяжувати себе вивченням цих методів, а зосередити увагу на правильності постановки задачі. Якщо математична модель неадекватна умові задачі, то ніякі методи і ніяка обчислювальна техніка не допоможуть її постановникові.

Для вирішення задач математичного програмування з економічним ухилом найбільш удалим є використання сучасної інформаційної системи *Microsoft Excel* версії 7.0 і вище. Пояснюється це, насамперед, тим, що дана система є програмним інструментом для вирішення інших (не зв'язаних із пошуком екстремуму) задач економіки. Великою перевагою системи є її універсальність. Практично будь-які типи задач математичного програмування можуть бути успішно вирішені за допомогою *Microsoft Excel*. Тут необхідно особливо підкреслити, що математичні моделі можуть носити дискретний характер. Однак при великій розмірності задачі її вирішення за допомогою даної системи може бути неефективним через великі витрати часу. У цьому випадку при неперервному характері математичної моделі задачі можна використовувати інформаційну систему *MathCAD 2000*.

Вибір цих систем як інструментальних програмних засобів для вирішення задач математичного програмування багато в чому обумовлений їхньою широкою популярністю і доступністю.

1.4.2. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel

Інформаційна система *Microsoft Excel* має вбудовану програму *Solver* (Пошук рішення), що являє собою потужний допоміжний інструмент для виконання складних обчислень, у тому числі вирішення більшості задач математичного програмування. Розглянемо використання програми *Solve* на прикладі вирішення транспортної задачі (1.17) – (1.25).

Вихідні дані для програми *Solve* повинні бути подані у вигляді електронної таблиці, що містить чотири типи областей:

область *змінних* задачі, будемо виділяти її жовтим кольором;

область *заданих параметрів* задачі, будемо виділяти її світлим зеленим фоном;

область *проміжних результатів*, будемо виділяти її блакитним фоном;

область *цільової функції,* будемо виділяти її червоним фоном.

Область змінних задачі – це обов'язкова область, що за своєю конфігурацією відповідає формі матриці змінних **X.** Кожний осередок області відповідає одному елементу x_{ij} матриці **X.** Змінні можуть мати початкові значення, але *не* обов'язково. У разі їхньої відсутності програма сама їх введе. Осередки змінних не повинні містити формул.

Область вихідних даних задачі – це обов'язкова область, що містить константи, задані умовою задачі. Для транспортної задачі ця область має три складові:

підобласть для матриці відстаней (тарифів) $\mathbf{C}=[c_{ij}]$;

підобласть для вектора запасів вантажу в пунктах відправлення **a**=[a_i];

підобласть для вектора потреб у вантажі в пунктах призначення **b**=[b_j].

Осередки всіх підобластей не повинні містити формул. Усі вихідні дані мають бути введені в ці підобласті до початку вирішення задачі.

Область проміжних результатів містять формули, що відображають залежності між даними таблиці. Для транспортної задачі ця область розпадається на три підобласті:

підобласть **C** × **X** для добутків елементів матриці **X** на відповідні елементи матриці **C.** Необов’язкова область. При її наявності кожний осередок містить формулу, що визначає добуток $x_{ij}c_{ij}$.

підобласть функцій обмежень типу (1.10), що визначають запаси в пунктах відправлення. Це обов'язкова область, кожний осередок якої містить формулу для визначення запасу вантажу у відповідному пункті відправлення $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$;

підобласть функцій обмежень типу (1.11), що визначають потребу у вантажі в пунктах призначення. Це обов'язкова область, кожний осередок якої містить формулу для визначення потреби відповідного пункту призначення $\sum_{i=1}^{m} x_{ij}$.

Область цільової функції складається з одного (і тільки одного) осередку, в якому записана формула для визначення критерію (1.9), тобто формула подвійної суми $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$ (при наявності області **C** × **X)** або спеціальна функція “СУММПРОИЗВ” (при відсутності області **C** × **X**).

Питання використовувати або не використовувати область **C**× **X** для вирішення транспортної задачі вирішує сам користувач. У випадку її наявності при малій розмірності транспортної задачі підсилюється наочність її вирішення, при великій – погіршується.

Слід зазначити, якщо транспортна задача має відкриту модель, то при її вирішенні немає необхідності приводити модель до закритої, як це має місце при ручному обчисленні. Крім того, немає також необхідності в процедурі пошуку початкового опорного плану.

1.4.3. Приклад вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel

На рис.1.3 показано розподіл областей електронної таблиці і їхнє заповнення вихідними даними в умовах ***прикладу 1.1.*** Як видно з таблиці, область змінних задачі заповнюється нулями, а підобласті вихідних даних заповнюються даними, взятими з умови задачі.

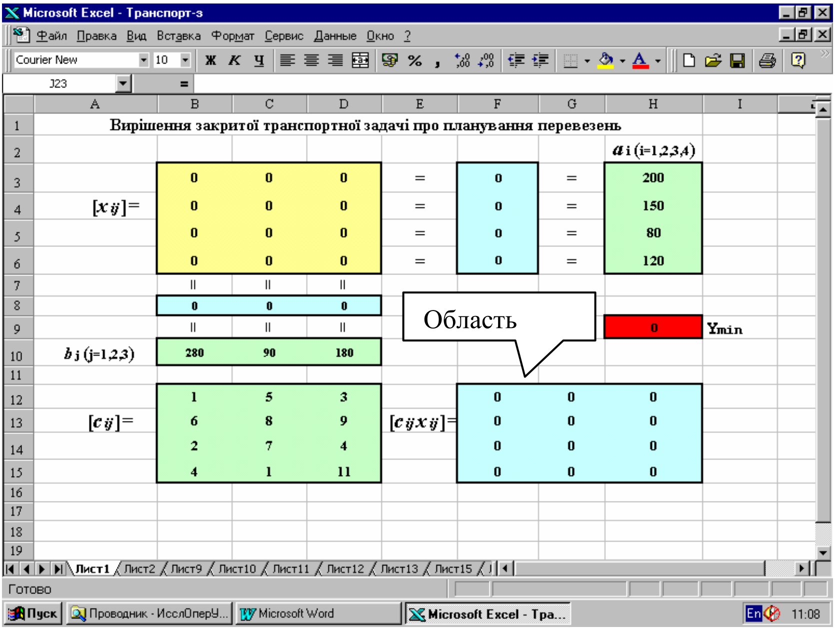


Рис.1.3

Область проміжних результатів заповнюється в такий спосіб:

в осередку $F$3 записують формулу =СУМ(B3:D3) і копіюють в осередки $F$4: $F$6;

в осередку $У$8 записують формулу =СУМ(B3:B6) і копіюють в осередки $C$8: $У$8;

в осередку $F$12 записують формулу =B3*B12 і копіюють в осередки $G$12: $H$12, а потім осередки $F$12:$H$12 копіюють в осередки $F$13: $H$15.

Нарешті, в осередок цільової функції $H$9 при наявності області $\mathbf{C} \times \mathbf{X}$ записують формулу =СУМ(F12:H15), а при відсутності – формулу =СУММПРОИЗВ(B12:D15;B3:D6).

Вся інша текстова інформація, подана в електронній таблиці (рис.1.3), не є обов'язковою. Її наявність або відсутність не впливає на вирішення задачі.

Подальша підготовка до запуску процесу вирішення задачі пов'язана безпосередньо з програмою *Solve,* що ініціалізується командою *Сервіс / Пошук рішення.* При цьому на екрані з'являється діалогове вікно програми *Solve, що* вимагає встановити параметри вирішення задачі. На рис.1.4 показано діалогове вікно програми з необхідними установками.

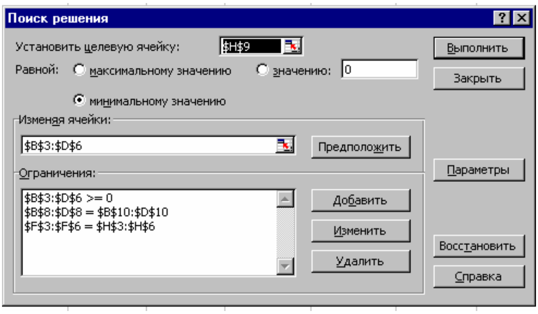


Рис.1.4 – Діалогове вікно програми *Solve*

Для транспортної задачі з ***прикладу 1.1*** *установки діалогового вікна* повинні бути наступними:

як цільовий осередок вказують осередок $H$9;

вибирають селекторну кнопку «мінімальне значення»;

у вікні «Змінюючи осередки» вказують діапазон кліток $B$3:$D$6;

у вікні «Обмеження» послідовно вказують обмеження задачі: $B$3:$D$6>=0; $B$8:$D$8=$B$10:$D$10; $F$3:$F$6=$H$3:$H$6.

Далі необхідно запустити процес обчислення натисканням кнопки «Виконати» в діалоговому вікні. Окремі кроки процесу відображаються в рядку стану. Після завершення пошуку рішення нові значення будуть вставлені в електронну таблицю, а на екрані з'явиться нове діалогове вікно, що містить інформацію про завершення процесу пошуку рішення. У цьому вікні необхідно вибрати опцію «Зберегти знайдене рішення». У результаті вибору нові значення залишаться в таблиці. У противному разі програма відновить значення, що були в таблиці до натискання кнопки «Виконати».

Для транспортної задачі з ***прикладу 1.1*** остаточний вигляд електронної таблиці подано на рис.1.5. Тут у цільовому осередку знаходиться оптимальне значення критерію оптимальності – число 1830, а в області змінних (осередки $B$3:$D$6) – шукані значення x_{ij}^{*}, що збігаються з опорним планом $\mathbf{X}_3$, отриманим при ручному обчисленні методом потенціалів.

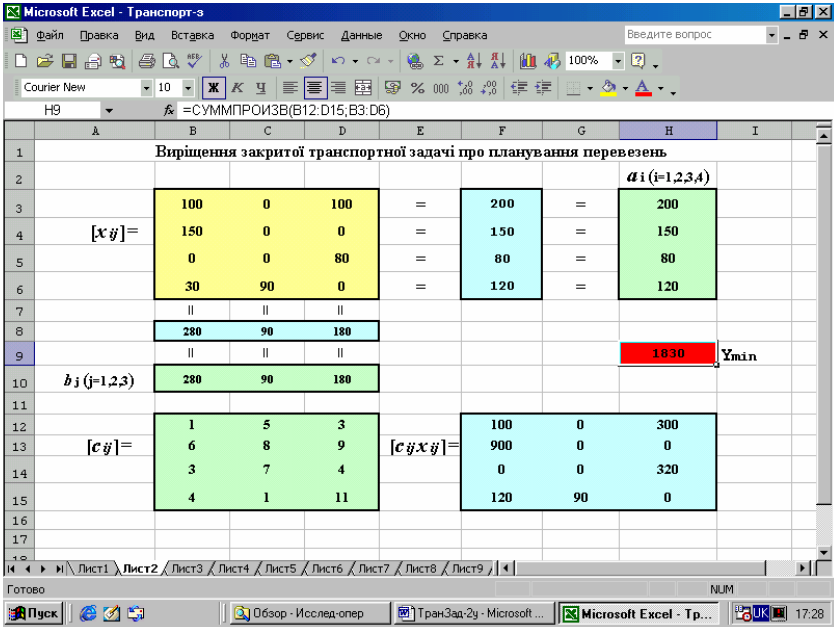


Рис.1.5

1.4.4. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи MathCAD 2000

Інформаційна система *MathCAD 2000* також може бути використана для вирішення екстремальних задач з неперервним характером математичної моделі. Для цієї мети використовують спеціальні обчислювальні блоки системи *MathCAD 2000: Given – minimize* або *Given – maximize*.

Розглянемо використання інформаційної системи *MathCAD 2000* на прикладі вирішення конкретної транспортної задачі. Оскільки з даною системою студенти можуть бути не знайомі, то розгляд буде більш ретельним.

Приклад 1.2. Нехай є три пункти відправлення деякого однорідного ресурсу $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_3}$ і три пункти призначення ресурсу $\mathbf{B_1, B_2, \ldots, B_3}$. Позначимо кількість ресурсу в i–м пункті відправлення через a_i (i= 1,2,3), а потребу кожного j–го пункту призначення через b_j (j=1,2,3). Відомі витрати c_{ij} (див. табл. 2) на перевезення однієї одиниці ресурсу з кожного i–го пункту відправлення в кожний j–й ці ресурсу з кожного i–го пункту відправлення в кожний j–й пункт призначення. Потрібно визначити: яку кількість ресурсу x_{ij} необхідно перевезти з кожного i–го пункту відправлення в кожний j–й пункт призначення, щоб забезпечити відправлення всього ресурсу всіх постачальників усім споживачам з мінімальними сумарними витратами на перевезення.

Таблиця 1.6

Пункти відправ-лення	Витрати $\boldsymbol{C}_{\mathbf{ij}}$ на перевезення однієї одиниці ресурсу з кожного $\boldsymbol{i}$–го пункту відправлення в кожний $\boldsymbol{j}$–й пункт призначення, *ум. од.*			Запас ресурсу
	$\boldsymbol{B_1}$	$\boldsymbol{B_2}$	$\boldsymbol{B_3}$	
$\boldsymbol{A_1}$	70	38	24	14
$\boldsymbol{A_2}$	58	18	56	20
$\boldsymbol{A_3}$	19	10	100	26
Потреба в ресурсі	30	22	15	

Послідовність вирішення

Насамперед, введемо пояснювальний текст у робочий аркуш. Для цього встановимо курсор (візир – червоний хрестик) у місце введення. Потім виберемо (клацанням миші) пункт ***Insert*** (Вставка) головного меню *MathCAD*. У падаючому меню, що з’явилося, виберемо пункт ***Text Region*** (текстова область) або в місці розташування курсору натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+”*** (подвійна лапка). В обох випадках з'явиться шаблон, що вказує на початок введення тексту. В міру введення пояснювального тексту «1.Цільова функція» текстова область буде автоматично збільшуватися. По закінченні цієї операції виведемо курсор (маркер введення – червона вертикальна риска) за рамку області.

Задамо критерій оптимізації – цільову функцію. Для цього встановимо курсор у місце введення математичного виразу. Почнемо з натискання відповідних клавіш. Спочатку задамо ім'я критерію оптимізації з аргументами, записаними через коми і охопленими дужками:

$$Y(X11,X12,X13,X21,X22,X23,X31,X32,X33)$$

Далі натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+:*** (двокрапка) для одержання знака присвоювання **:=** . На місці правої мітки розташуємо вираз критерію оптимізації. У результаті проведених дій одержимо на робочому аркуші цільову функцію:

$$Y(X11,X12,X13,X21,X22,X23,X31,X32,X33):=70\cdot X11+38\cdot X12+24\cdot X13...$$
$$+58\cdot X21+18\cdot X22+56\cdot X23\ldots$$
$$+19\cdot X31+10\cdot X32+100\cdot X33$$

Примітка. Щоб перенести на наступний рядок багаточлен, що складається з декількох доданків, досить натиснути комбінацію клавіш ***Ctrl+Enter***.

Аналогічно вводиться пояснювальний текст «2. Початкові наближення» і самі початкові наближення:

$$X11:=0\ \ X12:=0\ \ X13:=0\ \ X21:=0\ \ X22:=0\ \ X23:=0\ \ X31:=0\ \ X321:=0\ \ X33:=0$$

Для вирішення задачі використовуємо блок функції ***Given…Minimize...*** З цією метою потрібно:

ввести, якщо необхідно, коментар, натиснувши комбінацію клавіш ***Shift+"***;

ввести ключове слово ***Given***;

ввести (необов'язково) пояснювальний текст «3. Система обмежень»;

ввести систему обмежень (при цьому треба використовувати жирний знак рівності, викликавши його натисканням комбінацій клавіш ***Ctrl***+=):

$$X11+X12+X13=14 \qquad X21+X22+X23=20 \qquad X31+X32+X33=26$$
$$X11+X21+X31=30 \qquad X12+X22+X32=22 \qquad X13+X23+X33= 8.$$

Примітка. При формуванні системи обмежень можна одержати жирний знак рівностей, обравши його на панелі інструментів ***Boolean*** або натиснувши комбінацію клавіш ***Ctrl***+= (дорівнює).

ввести (необов'язково) пояснювальний текст «4. Граничні умови»;

ввести граничні умови (при необхідно використовувати знак більше або дорівнює «$\geq$ » на панелі інструментів ***Boolean***):

$$X11 \geq 0 \quad X12 \geq 0 \quad X13 \geq 0 \quad X21 \geq 0 \quad X22 \geq 0 \quad X23 \geq 0$$

$$X31 \geq 0 \quad X32 \geq 0 \quad X33 \geq 0\ ;$$

ввести шаблон присвоювання **:=** (двокрапка і знак рівності);

ввести в ліву мітку шаблона вектор шуканих змінних, а в праву – ім'я функції ***Minimize*** з шуканими параметрами:

$$\begin{bmatrix} X11 \\ X12 \\ X13 \\ X21 \\ X22 \\ X23 \\ X31 \\ X32 \\ X33 \end{bmatrix} := Minimize(Y, X11, X12, X13, X21, X22, X23, X31, X32, X33);$$

вивести результат розрахунку:

$$\begin{bmatrix} X\ 11 \\ X\ 12 \\ X\ 13 \\ X\ 21 \\ X\ 22 \\ X\ 23 \\ X\ 31 \\ X\ 32 \\ X\ 33 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 26 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

ввести пояснювальний текст «Визначити екстремум цільової функції»;

ввести цільову функцію *(Y,X11,X12,…)=…*

Вид екрана з послідовністю вирішення транспортної задачі з використанням блоку ***Given– minimize*** показаний на рис.1.6.

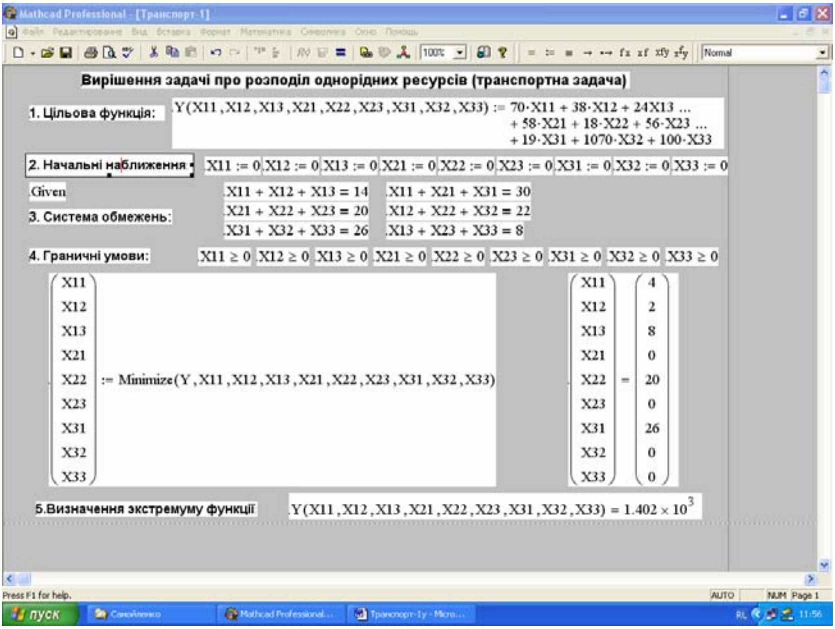


Рис.1.6

Оптимальний розподіл однорідних ресурсів зафіксовано у векторі (X11,X12,…). З отриманого результату видно, що X11=4, X12=2, X13=81, X21=0, X22=20, X23=0, X31=26, X32=0 і X33=0. Такий розподіл ресурсу забезпечить мінімальні сумарні витрати в розмірі 1402x103 *ум.од.*

Тема 1.5. Різновиди транспортних задач

Розглянута математична модель (1.9) – (1.12) є класичною моделлю транспортної задачі. У реальній практиці економіста і менеджера, як правило, транспортна задача зустрічається в дещо іншій постановці. Математична модель реальної транспортної задачі може відрізнятися від класичної або видом цільової функції, або видом обмежень, або характером змінних, або будь-яким сполученням перерахованих відмінностей одночасно.

Розглянемо декілька модифікацій транспортної задачі.

1.5.1. Цілочислова транспортна задача

Насамперед слід зазначити, що змінні в реальних задачах, як правило, мають цілочисловий характер. Цілочислові змінні мають місце, коли перевезений вантаж являє собою лічильну множину великих заготівель або комплектуючих, неподільних продуктів виробництва, упакованих сипучих матеріалів і т.п. Об'єм такого вантажу характеризується розміром, що виражається в штуках, пакунках, партіях і т.п.

Тоді математична постановка транспортної задачі планування перевезень набуває вигляду:

$$y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}; \qquad (12.6)$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (1.27)$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (1.28)$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}; \qquad (1.29)$$

$$x_{ij} = \mathrm{int}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m}. \qquad (1.30)$$

Математична модель цілочислової транспортної задачі (1.26) – (1.30) відрізняється від раніше розглянутої математичної моделі неперервної транспортної задачі (1.9) – (1.12) додатковим обмеженням на цілочисельність невідомих x_{ij} (1.30). Це потребує накладення обмеження цілочисельності на функції $f_1, f_{2,\ldots} f_{\mathrm{n+m}\ldots}$

Необхідно зауважити, що в загальному випадку умова цілочисельності може накладатися і на значення функції цілі y.

Цілочислова транспортна задача може бути з успіхом вирішена за допомогою розглянутого в курсі методу потенціалів, оскільки обчислювальні процедури останнього включають тільки математичні операції додавання і від'ємності, що не приводять до порушення вимоги цілочисельності на результат вирішення.

1.5.2. Транспортна задача про розподіл випуску продукції

При комплексному вирішенні проблеми виробництва і реалізації продукції виникає задача, що полягає у визначенні такого плану випуску і перевезень готової продукції, при якому досягаються мінімальні сукупні витрати на її виготовлення і доставку споживачам.

Для вирішення даної задачі розглядається повна собівартість виробництва одиниці продукції на кожному підприємстві (s_i) і транспортні витрати (s_{ij}), що залежать від типу застосовуваних транспортних засобів і районів розташування заводів-виготовників і споживачів.

Математична модель такої задачі має вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (s_i + s_{ij}) \cdot x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega} ; \tag{1.31}$$

$$\Omega: \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,n} ; \tag{1.32}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,m} ; \tag{1.33}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m} ; \tag{1.34}$$

$$x_{ij} = \text{int}; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,m} . \tag{1.35}$$

Якщо за умовою задачі потрібні ще капітальні вкладення в засоби транспорту, то показником ефективності служать приведені витрати, і цільова функція (1.31) матиме вигляд

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (s_i + s_{ij} + E_n k_i) \cdot x_{ij} \to \min , \tag{1.36}$$

де E_n – нормативний коефіцієнт ефективності капітальних вкладень; k_i – питомі капітальні вкладення, що приводяться на одиницю перевезень.

Виконуючи підстановку $c_{ij} = s_i + s_{ij_i}$ в цільову функцію (1.31) і підстановку $c_{ij} = s_i + s_{ij} + E_n k_i$ в цільову функцію (1.36), задача (1.31) – (1.35) і задача (1.36), (1.32) – (1.35) відповідно приводяться до класичної транспортної задачі, що може бути вирішена методом потенціалів.

1.5.3. Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай через $j=1,2,\dots,n$ позначено пункти, що мають вантажі для перевезень об'ємами a_j відповідно. Є m засобів доставки вантажу (видів транспорту). Вантажопідйомність i–го засобу доставки складає p_i, а наявний його парк дорівнює b_i, $i=1,2,\dots,m$... Вантажі підлягають доставці в один центральний пункт (склад). Витрати при здійсненні однією одиницею i–го засобу доставки від j–го пункту до складу дорівнюють c_{ij}. Потрібно скласти найбільш економічний план доставки.

Математична модель задачі. Позначимо через x_{ij} кількість засобів доставки i–го типу, що відправляється з j–го пункту. Тоді математична модель розподільної транспортної задачі про вибір транспортних засобів має вигляд:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min_{x_{ij}\in\Omega}\ ; \qquad (1.37)$$

$$\Omega:\quad \sum_{i=1}^{m}p_i x_{ij}\ge a_j,\quad j=\overline{1,n}\ ; \qquad (1.38)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le b_i,\quad i=\overline{1,m}\ ; \qquad (1.39)$$

$$x_{ij}\ge 0;\quad i=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m}\ ; \qquad (1.40)$$

$$x_{ij}=\text{int};\quad i=\overline{1,m};\quad i=\overline{1,m}\,. \qquad (1.41)$$

Цільова функція (1.37) визначає сумарні витрати на доставку вантажу на центральний склад. Вираз (1.38) вказує на необхідність вивезення всього вантажу з пунктів відправлення. Обмеження (1.39) вказує на те, що кількість використовуваних засобів доставки не повинна перевищувати їхній наявний парк.

Поява параметра p_i у системі обмежень (1.38) перешкоджає зведенню математичної моделі завдання до моделі класичної. Тому вирішувати її методом потенціалів неможливо. Вирішення даної задачі класичними методами лінійного програмування також неможливе через цілочисельність змінних x_{ij}. Вирішення задачі можна одержати методом відсікання (шляхом введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей Гоморі), однак процедура вирішення різко ускладнюється. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програму *Solver* (Пошук рішення) інформаційної системи *Microsoft Excel.*

1.5.4. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Однорідний вантаж потрібно доставити з m пунктів відправлення в n пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на p перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень c_{ij} з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в кожний пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

c_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, $i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}$;

c_{ik} – вартість перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт $i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,p}$;

c_{kj} – вартість перевезення одиниці вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення $k=\overline{1,p}, \quad j=\overline{1,n}$;

a_i – запаси вантажу в i-м пункті відправлення;

b_j – потреба у вантажі в j-м пункті призначення;

c_k – місткість k-го перевалочного пункту;

x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

y_{ik} – кількість вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

z_{kj} – кількість вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище наведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}c_{ik}\cdot y_{ik}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}\cdot z_{kj}\to\min_{x_{ij},y_{ik},z_{kj}\in\Omega}\;; \quad (1.42)$$

$$\Omega:\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}+\sum_{k=1}^{p}y_{ik}\le a_i,\quad i=\overline{1,m}; \quad (1.43)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}+\sum_{k=1}^{p}z_{kj}\ge b_j,\quad j=\overline{1,n}; \quad (1.44)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}\le c_k,\quad k=\overline{1,p}; \quad (1.45)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}z_{kj},\quad k=\overline{1,p}; \quad (1.46)$$

$$x_{ij}\ge 0;\; y_{ik}\ge 0;\; z_{kj}\ge 0,\; i=\overline{1,m},\; j=\overline{1,n},\; k=\overline{1,p}. \quad (1.47)$$

Тут цільова функція (1.42) складається з витрат трьох видів: на доставку частини вантажу з пунктів відправлення в пункти призначення, минаючи перевалочні пункти; на перевезення частини вантажу з пунктів призначення в перевалочні пункти; на доставку вантажу з перевалочних пунктів у пункти призначення. Система обмежень (1.43) говорить про те, що сумарні об'єми вантажів, що вивозяться з пунктів відправлення, не можуть перевищувати запаси вантажів у цих пунктах. Система обмежень (1.44) свідчить про те, що сумарні об'єми вантажів, що поступають у пункти призначення, не можуть бути менше відповідних потреб пунктів призначення. Система обмежень (1.45) означає, що сумарне завезення вантажів на кожний перевалочний пункт не може перевищувати його місткості. Система обмежень (1.46) вказує на те, що весь вантаж із перевалочних пунктів повинен бути вивезений повністю.

Як і в попередній задачі, математична модель (1.42) – (1.47) не може бути приведена до класичної. Тому вирішення задачі найбільш доцільно покласти на програму *Solver* (Пошук рішення) інформаційної системи *Microsoft Excel.*

1.5.5. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів

Змістовна постановка завдання. Вантаж, що включає q видів продукції, потрібно доставити з m пунктів відправлення в n пунктів призначення. При доставці в пункти призначення вантажі можуть бути спочатку доставлені на p перевалочних пунктів. Задано вартості перевезень для кожного виду вантажу з кожного пункту відправлення в кожний пункт призначення і перевалочний пункт, а також вартості перевезення з кожного перевалочного пункту в кожний пункт призначення.

Математична модель завдання. Позначимо:

c_{ijl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,q}$;

c_{ikl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт, $i = \overline{1,m}$, $k = \overline{1,p}$, $l = \overline{1,q}$;

c_{kjl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,q}$;

a_{il} – запаси l-го виду вантажу в i-м пункті відправлення;

b_{jl} – потреба в l-м виді вантажу в j-м пункті призначення;

c_{kl} – місткість k-го перевалочного пункту стосовно l-го виду вантажу ;

x_{ijl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

y_{ikl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

z_{kjl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення.

Математична модель задачі з урахуванням вище приведених позначень може бути подана у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{ijl}\cdot x_{ijl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}c_{ikl}\cdot y_{ikl}+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{kjl}\cdot z_{kjl}\to\min_{x_{ijl},y_{ikl},z_{kjl}\in\Omega};$$
(1.48)

$$\Omega:\ \sum_{j=1}^{n}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}y_{ikl}\le a_{il},\quad i=\overline{1,m}; \qquad (1.49)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}z_{kjl}\ge b_{jl},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q}; \qquad (1.50)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ikl}\le c_{kl},\quad k=\overline{1,p},\quad l=\overline{1,q}; \qquad (1.51)$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_{ik}=\sum_{j=1}^{n}z_{kj},\quad k=\overline{1,p},\quad l=\overline{1,q}; \qquad (1.52)$$

$$x_{ijl}\ge 0;\ y_{ikl}\ge 0;\ z_{kjl}\ge 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p},\ l=\overline{1,q}. \qquad (1.53)$$

Математична модель задачі відрізняється від попередньої тільки тим, що вона враховує різновид вантажів. Як і попередню, дану задачу доцільно вирішувати за допомогою програми *Solver* (Пошук рішення) інформаційної системи *Microsoft Excel.*

1.5.6. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів за запитми споживачів

Існує модифікація транспортної задачі двохетапного перевезення вантажів декількох видів, у якій кількість вантажу в пунктах відправлення *не фіксована*. Вона залежить від запитів споживачів.

Математична модель задачі. Позначимо:

c_{ijl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення, $i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n},\quad l=\overline{1,q}$;

c_{ikl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p}$, $l=\overline{1,q}$;

c_{kjl} – вартість перевезення одиниці l-го виду вантажу з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення, $k=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,n}$, $l=\overline{1,q}$;

t_{il} – витрати на виробництво l-го виду вантажу в i-м пункті відправлення;

b_{jl} – потреба в l-м виді вантажу в j-м пункті призначення;

c_{kl} – місткість k-го перевалочного пункту стосовно l-го виду вантажу ;

x_{ijl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення;

y_{ikl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в k-й перевалочний пункт;

z_{kjl} – кількість l-го виду вантажу, перевезеного з k-го перевалочного пункту в j-й пункт призначення;

s_{il} – кількість виробленого l-го виду вантажу в i-м пункті відправлення.

Математичну модель задачі з урахуванням вище наведених позначень можна подати у вигляді задачі лінійного програмування:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{ijl}\cdot x_{ijl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q}c_{ikl}\cdot y_{ikl}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{q}c_{kjl}\cdot z_{kjl}+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{q}t_{il}s_{il}\to\min_{x_{ijl},y_{ikl},z_{kjl},s_{il}\in\Omega}; \quad (1.54)$$

$$\Omega:\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}y_{ikl}\le s_{il}, \quad i=\overline{1,m},\ \ l=\overline{1,q}; \quad (1.55)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ijl}+\sum_{k=1}^{p}z_{kjl}\ge b_{jl}, \quad j=\overline{1,n},\ \ l=\overline{1,q}; \quad (1.56)$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ikl} \le c_{kl} \ , \qquad k = \overline{1,p} \ , \qquad l = \overline{1,q} \ ; \tag{1.57}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{kj} \ , \qquad k = \overline{1,p}, \qquad l = \overline{1,q} \ ; \tag{1.58}$$

$$x_{ijl} \ge 0;\ y_{ikl} \ge 0;\ z_{kjl} \ge 0,\ s_{il} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p},\ l = \overline{1,q}. \tag{1.59}$$

Цільова функція в математичній моделі (1.54) – (1.59) відрізняється від цільової функції (1.48) тільки тим, що враховує витрати на виробництво продукції (вантажу) в пунктах відправлення. Як і попередню, дану задачу доцільно вирішувати за допомогою програми *Solver* (Пошук рішення) інформаційної системи *Microsoft Excel.*

1.5.7. Транспортна задача про закриття підприємства

Змістовна постановка задачі. Виробниче об'єднання складається з *n* заводів і *m* складів. Задано потреби складів у продукті й вартості на перевезення продуктів з кожного заводу на кожний склад. Задані фіксовані вартості функціонування заводів і можливості заводів по виробництву продукту. Виробниче об'єднання розглядає можливість закриття одного або декількох заводів. Це повинно зменшити витрати на перевезення. Які заводи, якщо це доцільно, повинні бути закриті?

Математичне формулювання завдання. Позначимо:

c_{ij} – вартості перевезення з j-го заводу на i-й склад;

d_i, – потреби i-го складу в продукті, $i = 1, \ldots, m$;

a_j – можливість j-го заводу по виробництву продукту;

e_j – фіксована вартість функціонування j-го заводу;

z_j – булєве число, що показує, чи потрібно закрити j-й завод (значення 0), чи залишити його працювати (значення 1);

x_{ij} – кількість перевезеного товару з j-го заводу на i-й склад.

Тоді математична модель транспортної задачі про закриття заводу може бути подана у такому вигляді:

$$y = \sum_{j=1}^{n} \left(z_j \cdot e_j + \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \right) \to \min_{z_j, x_{ij} \in \Omega} \ , \tag{1.60}$$

$$\Omega: \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le z_j a_j , \quad j = \overline{1,n} \, ; \tag{1.61}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \ge d_i \, , \quad i = \overline{1,m} \, ; \tag{1.62}$$

$$x_{ij} \ge 0 \, , \quad i = \overline{1,m} ; \quad j = \overline{1,n} \, ; \tag{1.63}$$

$$z_j \in \{0,1\}; \quad j = \overline{1,n} \, , \tag{1.64}$$

Тут цільова функція (1.60) визначає загальні витрати виробничого об'єднання на функціонування заводів і транспортування готової продукції на склади. Обмеження (1.61) визначає можливості заводів з виробництва продукції. Обмеження (1.62) визначають потреби складів у готовій продукції.

Тема 1.6. Задача цілочислового лінійного програмування

Продовжуючи тему перевезення вантажу, розглянемо ще декілька задач, математична модель яких відповідає цілочисловій задачі лінійного програмування, але не вкладається в поняття *транспортної* задачі.

Оптимальне вирішення нижче приведених задач, як і раніше розглянутих задач у п. 1.5.3 – 1.5.7, не може бути отримане за допомогою методу потенціалів. Вирішення цих задач класичними методами лінійного програмування також неможливе через цілочисловий характер змінних x_j. Шукані рішення можна одержати методом відсікання (шляхом введення в задачу додаткових обмежень у вигляді нерівностей Гоморі), але процедури вирішень у цьому випадку різко ускладнюються. Тому пошук рішення нижче наведених задач теж доцільно покласти на програму *Solver* інформаційної системи *Microsoft Excel.*

1.6.1. Задача про розподіл вантажного флоту

Змістовна постановка завдання. Нехай вантажний флот має у своєму складі судна n типів. Кількість суден типу j дорівнює q_j, а витрати при використанні одного судна типу j у планованому періоді складає c_j, $j=1,2,...,n...$ Кожне судно має вантажні ємкості m типів (трюми, палуби, танки і т.п.). Вантажопідйомність ємкості i на судні типу j дорівнює d_i, $i=1,2,...,m...$ Перевезенню підлягають p видів вантажу. Вантаж виду k є в кількості a_k, $k=1,2,...,p...$ Треба вибрати найбільш економічний комплекс транспортних засобів для перевезення вантажу.

Математична модель задачі.

Позначимо:

x_j – кількість суден j-го типу, $j=1,2,...,n$;

z_{ik}–кількість вантажу виду k, що підлягає завантаженню в ємкість i, $k=1,2,...,p...$

Тоді математична модель задачі про розподіл вантажного флоту має вигляд:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega} \; ; \tag{1.65}$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j - \sum_{k=1}^{p} z_{ik} \geq 0, \quad i = \overline{1,m} \; ; \tag{1.66}$$

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ik} = a_k, \quad k = \overline{1,p} \; ; \tag{1.67}$$

$$0 \leq x_j \leq q_j; \quad j = \overline{1,n}; \tag{1.68}$$

$$x_j = \text{int}, \quad j = \overline{1,n}; \tag{1.69}$$

$$z_{ik} \geq 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad k = \overline{1,p} \; . \tag{1.70}$$

Тут обмеження (1.66) показує, що загальна кількість вантажу, яка завантажена в ємкості кожного типу, не повинна перевищувати сумарну вантажопідйомність цих ємкостей у всіх судах, а обмеження

(1.67) говорить про те, що перевезення усіх вантажів повинно бути повністю здійснено.

Приклад транспортної задачі про розподіл вантажного флоту. Нехай вантажний флот має у своєму складі судна чотирьох типів. Кількість суден j-го типу ($j=1,2,3,4$) відповідно дорівнює 15, 20, 30, 25. Витрати при використанні одного судна j-го типу в планованому періоді складають відповідно 6, 5, 7, 4 од. Кожне судно має вантажні ємкості трьох типів (трюми, палуби, танки). Вантажопідйомність z_{ij} кожної i–ї ємкості ($i=1,2,3$) на судні типу j визначається з матриці $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Перевезенню підлягає вантаж двох видів (p=2). Вантаж виду k ($k=1,2$) є відповідно в кількості 220 і 130. Потрібно вибрати найбільш економічний комплекс транспортних засобів для перевезення вантажу.

Вирішення задачі в інформаційній системі Microsoft Excel. Для вирішення задачі необхідно зробити наступні установки даних у діалоговому вікні команди: *Сервіс / Пошук рішення*:

Цільовий осередок – $C$13

Вид екстремуму – мінімум

Осередки зі змінними – $B$6:$E$6;$L$5:$M$7

Обмеження: $B$6:$E$6 >= 0

$B$6:$E$6 >= ціле

$B$6:$E$6 <= $B$4:$E$4

$L$5:$M$7 >= 0

$L$5:$M$7 >= ціле

$P$14:$P$16 >= 0

$L$9:$M$9 = $L$11:$M$11

Вигляд екрана після виконання команди Сервіс / Пошук рішення показаний на рис.1.7.

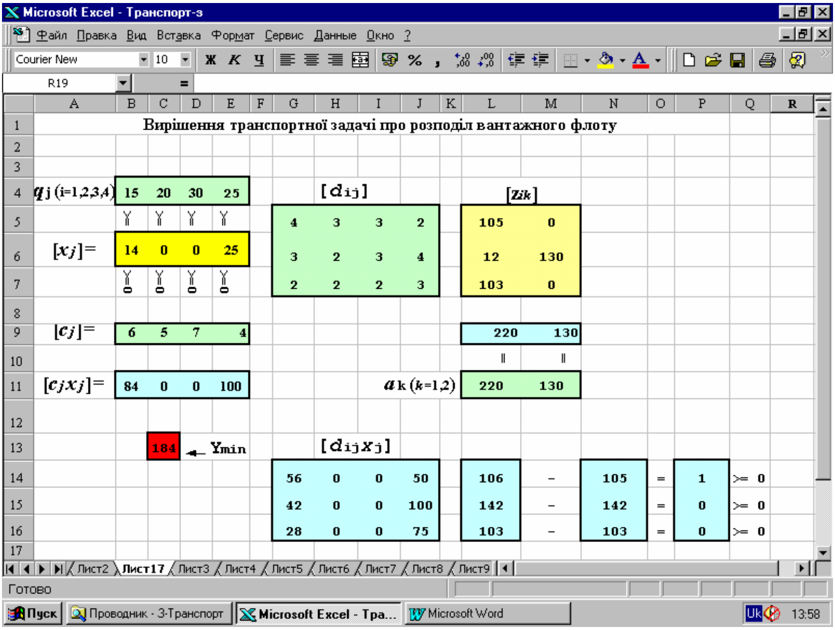


Рис 1.7.

1.6.2. Задача про розвезення вантажу

Змістовна постановка задачі. Нехай деяка центральна база постачає продукцію (її можна вважати однорідною) на m складів. Розвезення продукції на склади здійснюються однією вантажівкою, причому кожний склад одержує своє замовлення в один прийом – вантажопідйомність вантажівки для цього достатня. Вантажівка може одночасно взяти вантаж, що відповідає не більше ніж k замовленням. Вантажівка може об'їжджати склади за визначеними r маршрутами. Один і той самий склад може знаходитися на різних маршрутах.

Нехай для кожного складу відома функція витрат залежно, наприклад, від розміру замовлення. Потрібно скласти графік розвезень, що забезпечує всіх клієнтів і мінімізує сумарні витрати. Час доставки не враховується. Передбачається, що всі операції по доставці гарантовано можуть бути здійснені протягом деякого періоду часу, що влаштовує всіх споживачів.

Під способом розвезення будемо розуміти будь-яку припустиму комбінацію виконання замовлень. Він являє собою m–мірний стовпець, i-й компонент якого дорівнює одиниці, якщо i–й замовлення в цьому способі задовольняється, і нулю – у противному разі. Для будь-якої реальної задачі при невеликих значеннях m, k і r можна фактично виписати всі такі способи розвезення. Число n цих способів буде залежати не тільки від перерахованих параметрів, але і від числа складів на кожному маршруті, об'єму замовлень і т.д. Кожному j–му способу розвезення відповідають витрати c_j.

Нехай при даних конкретних умовах задачі сформована матриця $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ способів розвезення, що складається з нулів і одиниць. Стовпці цієї матриці являють собою описані вище способи розвезення, тобто $a_{ij}=1$, якщо в j–м способі i–е замовлення задовольняється, і $a_{ij}=0$ у противному разі. Тепер завдання полягає у виборі найбільш економічної комбінації цих способів.

Математична модель задачі. Введемо змінні x_j, рівні 1, якщо j–й спосіб розвезення реалізується, і рівні 0 – у противному разі. Тоді математична модель задачі набуває вигляду:

$$y = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{x_j \in \Omega}; \qquad (1.71)$$

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \quad i = \overline{1,m}; \qquad (1.72)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = \overline{1,n}; \qquad (1.73)$$

$$a_{ij} \in \{0,1\}, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (1.74)$$

Умова (1.72) означає, що всі замовлення повинні бути задоволені тільки один раз.

Приклад задачі про розвезення вантажу. Нехай у рамках умови задачі про розвезення вантажу відома матриця

$$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

усіх можливих способів розвезення вантажу з центральної бази в п'ять магазинів, а також витрати, пов'язані з реалізацією кожного способу, а саме 11, 14, 9, 12, 13, 7,10, 8, 13 вартісних од. Скласти графік розвезення, що забезпечує мінімальні сумарні витрати.

Вирішення задачі в інформаційному середовищу Microsoft Excel

Для вирішення задачі треба зробити наступні установки даних у діалоговому вікні команди *Сервіс / Пошук рішення*:

Цільовий осередок – $L$8

Осередки зі змінними – $B$4:$J$4

Обмеження: $B$4:$J$4 = “двоїчне”

$L$16:$L$20 = 1

Вид екрана після виконання команди *Сервіс / Пошук рішення* показано на рис.1.8.

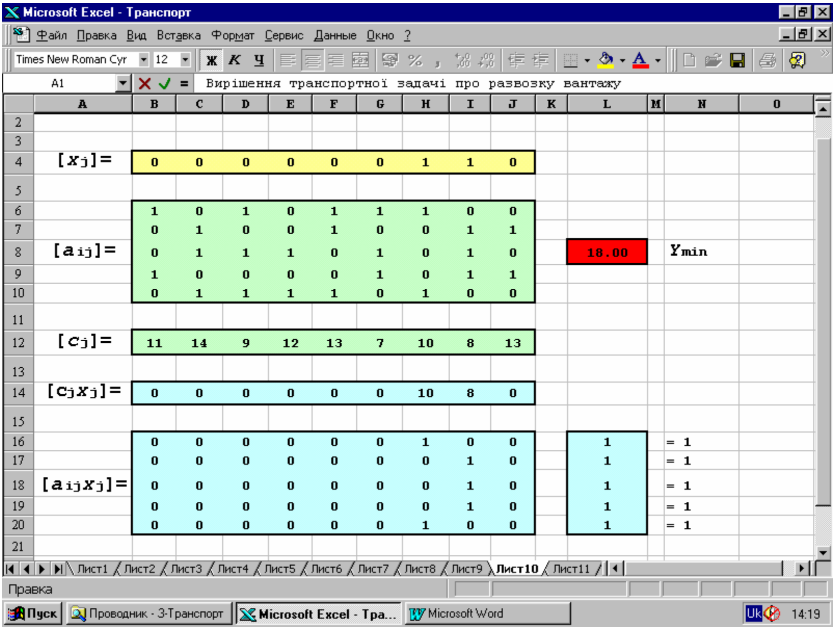


Рис. 1.8

Індивідуальні завдання до розділу 1

Для придбання практичних навиків з використання математичних методів при вирішенні конкретних задач математичного програмування, а також для оволодіння сучасними інформаційними технологіями пошуку оптимальних рішень студенти повинні самостійно виконати два індивідуальних завдання.

Перше завдання стосується *транспортної задачі*, а друге – *цілочислової задачі лінійного програмування*. Обидва індивідуальних завдання входять у контрольну роботу №1, яку студенти повинні виконати самостійно і подати звіт про це викладачеві.

У першому індивідуальному завданні за умовою задачі та індивідуальними вихідними даними студенти повинні:

складати математичну модель конкретної транспортної задачі;

знайти оптимальне рішення транспортної задачі, використовуючи метод потенціалів;

знайти оптимальне рішення транспортної задачі, використовуючи програму *Solver* інформаційної системи *Microsoft Excel*;

знайти оптимальне рішення транспортної задачі, використовуючи інформаційну систему *MathCAD 2000.*

У другому індивідуальному завданні за умовою задачі та індивідуальними вихідними даними студенти повинні:

скласти математичну модель конкретної цілочислової задачі лінійного програмування;

знайти оптимальне рішення задачі, використовуючи програму *Solver* інформаційної системи *Microsoft Excel.*

Завдання №1

Умова задачі. Скласти оптимальний план перевезень одягу між трьома фабриками хімчистки і п'ятьма пунктами прийому одягу в хімчистку від населення, якщо відстані (в *км*) між фабриками хімчистки і приймальними пунктами визначаються матрицею

$$C = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 3 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 13 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5} \ .$$

Відомі потужності фабрик хімчистки і пропускні спроможності приймальних пунктів.

Дані про потужність фабрик хімчистки і про пропускні спроможності приймальних пунктів кожним студентом вибираються з табл.1.7 і табл.1.8 відповідно до його варіанта. Варіант визначається за останньою цифрою номеру залікової книжки студента.

Таблиця 1.7 – Потужність фабрик хімчистки (*т за добу*)

№ фабрики	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3,4	3,0	4,2	3,1	1,9	0,9	1,0	2,5	3,3	1,8
2	2,3	1,5	1,3	4,2	2,6	4,3	3,1	3,5	3,9	4,3
3	2,8	4,0	3,0	1,2	4,0	3,3	4,4	2,5	1,3	2,4

Таблиця 1.8 – Пропускна спроможність приймальних пунктів (*т за добу*)

№ приймального пункту	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,5	0,9	1,1	1,0	2,7	2,1	1,2	2,5	2,8	1,3
2	1,6	2,5	1,3	3,0	1,5	2,3	1,9	2,0	1,9	0,6
3	2,1	3,0	2,2	0,6	1,0	1,4	1,8	1,7	1,1	2,4
4	1,7	0,7	3,1	1,9	3,0	1,2	1,5	0,9	0,7	3,0
5	1,6	1,4	0,8	2,0	0,3	1,5	2,1	1,4	2,0	1,2

Вимоги до звіту студента про виконання індивідуального завдання №1. Звіт повинен містити:

умову транспортної задачі з індивідуальними вихідними даними відповідно до обраного варіанта (без таблиць вибору варіанта);

математичну модель задачі (див. приклад 1.1 у п.1.3.6);

ітераційне вирішення транспортної задачі методом потенціалів із супроводом кожного кроку необхідними поясненнями і таблицями (див. процес вирішення за прикладом 1.1 у п.1.3.6);

вирішення транспортної задачі за допомогою програми *Solver* інформаційної системи *Microsoft Excel* з вказівкою всіх установок у діалоговому вікні програми *Solver* (див. п. 1.4.3) і роздруківкою відповідної електронної таблиці після виконання *команди Сервіс / Пошук рішення* (див. рис.1.4);

вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *MathCAD 2000* з роздруківкою екрана з послідовністю вирішення транспортної задачі (див. рис.1.5);

порівняльну оцінка трьох способів вирішення транспортної задачі за трудомісткістю та часом вирішення.

Завдання №2

Умова задачі. Скласти оптимальний план забудови мікрорайону міста, якщо відомо, що він повинен забудовуватися житловими будинками трьох серій. Характеристики житлових будинків кожної серії подані в табл.1.9. З огляду на демографічний прогноз населення проектованого мікрорайону, необхідно, щоб кількість квартир відповідала проектному завданню, що поведене в табл.1.10.

Дані про проектну кількість квартир вибираються студентом із табл.1.10 відповідно до його варіанта. Варіант визначається за останньою цифрою номеру залікової книжки студента.

Таблиця 1.9 – Склад квартир і кошторисна вартість житлових будинків різних серій (для всіх варіантів однакові)

Характеристика житлових будинків	Серія		
	1	2	3
Кількість квартир - усього	200	210	150
в тому числі: на двох чоловік	50	50	60
на трьох чоловік	60	70	50
на чотири чоловіки	90	90	40
Кошторисна вартість житлового будинку, *тис. грн.*	1200	1250	800

Таблиця 1.10 – Проектна кількість квартир у мікрорайоні на 2, 3 і 4 чоловіки

Склад сім’ї	В а р і а н т									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2 чол.	600	800	750	625	900	850	950	700	1000	800
3 чол.	1800	1750	1850	1750	2100	1900	2000	1850	1950	2050
4 чол.	700	650	800	600	750	550	400	850	600	450

Вимоги до звіту студента про виконання індивідуального завдання №2. Звіт повинен містити:

умову цілочислової задачі лінійного програмування з індивідуальними вихідними даними відповідно до обраного варіанта (без таблиці вибору варіанта);

математичні модель задачі;

вирішення задачі за допомогою програми *Solver* інформаційної системи *Microsoft Excel* з указівкою всіх установок у діалоговому вікні програми *Solver* і роздруківкою відповідної електронної таблиці після виконання команди *Сервіс / Пошук рішення* .

Вимоги до оформлення контрольної роботи №1. Контрольна робота повинна складатися з титульної сторінки (див. Додаток А) і двох звітів про індивідуальні завданнях №1 і №2 відповідно. Вона може бути надрукована на принтері або виконана в рукописному варіанті. У другому випадку роздруківки екранів (відповідно до вимог індивідуальних завдань) повинні бути акуратно вклеєні в рукописну контрольну роботу.

Розділ 2. ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тема 2.1. Загальні поняття теорії масового обслуговування

Необхідність підвищення ефективності суспільного виробництва обумовлює постановку і вирішення все більш важливих і складних задач. В остаточному підсумку це вимагає удосконалення раніше розроблених методів дослідження і створення нових технічних, технологічних, економічних і математичних теорій.

Теорія масового обслуговування являє собою новий напрямок в теорії імовірностей, що сформувався в самостійну наукову дисципліну, завдяки специфіки застосованого математичного апарата і важливості розв'язуваних практичних задач.

Початок розробки практичних задач масового обслуговування поклав співробітник Копенгагенської телефонної компанії датський математик А.К.Ерланг (1878 – 1929 р.р.) у період 1908 – 1922 р.р. У 1909 р. з'явилася його робота "Теорія імовірностей і телефонні переговори" та інші публікації, в яких були сформульовані перші прикладні задачі телефонії. Ці задачі були пов'язані з необхідністю впорядкувати роботу телефонної мережі і розробити методи оцінки якості обслуговування споживачів залежно від числа використовуваних пристроїв.

Узагальнення методів вирішення різноманітних задач і розробка загальної теорії масового обслуговування пов'язані з ім'ям радянського математика А.Я.Хінчина. У його книзі "Математичні методи теорії масового обслуговування" вперше сформульовані загальні ідеї і методи теорії. Подальший розвиток теорії масового обслуговування по'язаний з ім'ям радянського математика Б.В.Гнеденка і його учнів А.Н.Колмогорова, Н.П.Бусленка та ін. Із закордонних авторів відомі Д.Кендалл, Ф.Паллачек, Л.Токач та ін.

Загальною особливістю задач із застосуванням теорії масового обслуговування є *випадковий* характер досліджуваних процесів. Однією з типових життєвих ситуацій слід вважати утворення черг при задоволенні яких-небудь потреб, що призводить до втрат робочого часу і воленні яких-небудь потреб, що призводить до втрат робочого часу і непродуктивної витрати ресурсів.

У всіх галузях людської діяльності відбуваються процеси, що мають характер масового обслуговування, а саме:

побутове обслуговування – обслуговування продавцями покупців у магазинах, ремонт різних побутових предметів у майстернях, розмови по телефону, надання медичної допомоги, бібліотечне обслуговування, готельне обслуговування, пожежне обслуговування і т.п.;

у військовій справі – обстріл літаків, катерів та інших видів техніки противника, так само як і бомбування з літака;

у виробництві – транспортне і ремонтне обслуговування, організація постачання.

Типовим прикладом задачі масового обслуговування в житлокомунальному господарстві є експлуатація одним робітником (сантехником, електриком, ремонтником) групи об'єктів (будинків, під'їздів, квартир, ліфтів і т.п.). Якщо за робітником закріплено недостатньо об'єктів, то в моменти їхньої справності він простоює, якщо багато – він не може їх вчасно обслужити. Аналогічна ситуація виникає, якщо декілька (n) об'єктів обслуговуються декількома (r) робітниками.

Теорія масового обслуговування вивчає закономірності протікання процесів, пов'язаних із масовим обслуговуванням, розробкою кількісних методів пошуку таких об'єктивних характеристик, що забезпечують своєчасне задоволення вимог на обслуговування.

У вітчизняній і закордонній літературі теорію масового обслуговування називають по-різному: теорією лінії очікування, теорією черг, проблемами скупченості та ін. Ця наукова дисципліна займається описом, аналізом і дослідженням різних за своїм змістом явищ з метою виявлення і створення необхідних передумов для їхнього якісного функціонування. При цьому під якістю обслуговування розуміється не те, як добре виконана робота, а наскільки вона вчасно виконана, чи не утворюються черга на обслуговування вимог або чи не відбувається втрата вимог на обслуговування через одночасну зайнятість всього обслуговуючого персоналу.

У загальному вигляді черга на обслуговування може виникати за такими чинниками:

недостатня кількість або недостатня продуктивність обслуговуючих каналів (обслуговуючого персоналу);

нерегулярне надходження вимог;

зміна (варіювання) тривалості обслуговування.

При організації виробництва, коли вимоги на обслуговування поступають рівномірно, через рівні проміжки часу, коли вони вчасно обслуговуються, ніякої задачі масового обслуговування не виникає.

Тема 2.2. Основні поняття, термінологія і класифікація систем масового обслуговування

Системи, в яких, з одного боку, виникають масові запити (вимоги) на виконання яких-небудь видів послуг, а з другого – відбувається задоволення цих запитів, називаються *системами масового обслуговування.*

Під обслуговуванням розуміється задоволення якихось потреб.

Систему масового обслуговування можна надати як сукупність послідовно зв'язаних між собою вхідних потоків на обслуговування вимог (заявки на ремонт, вимоги на видачу книг, запит на зліт і т.д.), черг, каналів обслуговування (лінії СТО, співробітники відділу абонементного обслуговування, злітні смуги аеродрому і т.д.) і вихідних потоків вимог після обслуговування.

Таким чином, складовими елементами систем масового обслуговування є:

вхідний потік вимог і заявок, що являють собою запити на задоволення якоїсь потреби (під потоком вимог мається на увазі послідовність заявок на обслуговування, що випливають у випадкові моменти часу);

черга на обслуговування, що складається з вимог, які потребують обслуговування;

канали обслуговування, що об'єднуються в обслуговуючу систему (технічні засоби і люди, за допомогою яких задовольняються різні запити);

вихідний потік вимог (обслугованих і необслугованих), що покидають обслуговуючу систему (для іншої системи може бути вхідним).

Існує декілька різновидів систем масового обслуговування, що відрізняються особливостями надходження вимог і організації роботи обслуговуючих апаратів.

Ще Ерланг звернув увагу на те, що мають місце два основних типи систем у телефонії – із чеканням і втратами. У сучасній теорії масового обслуговування розрізняють значно більшу кількість типів систем.

Системи масового обслуговування за наявністю тієї або іншої ознаки можна класифікувати таким чином:

1. За *характером надходження вимог* – на системи з *регулярним* і *випадковим потоком* надходження вимог у систему. Якщо кількість вимог, що поступають у систему в одиницю часу (інтенсивність потоку) постійна або є заданою функцією часу, то маємо систему з регулярним потоком надходження вимог, у противному разі – з випадковим.

2. Системи з *випадковим потоком* вимог підрозділяються на *стаціонарні* й *нестаціонарні.* Якщо параметри потоку вимог не залежать від розташування розглянутого інтервалу часу на осі часу, то потік вимог – стаціонарний, у противному разі – нестаціонарний. Наприклад, якщо число покупців, які приходять у магазин, не залежить від часу доби, то потік покупців (вимог) – стаціонарний.

3. За кількістю вимог, що поступають за одиницю часу, – на системи *з* ординарним *і* неординарним потоками вимог. Якщо імовірність надходження двох і більше вимог одночасно дорівнює нулю або має настільки мале значення, що ним можна знехтувати, то маємо систему з ординарним потоком вимог. Наприклад, потік вимог – літаків, що поступають на злітно-посадкову смугу аеродрому, можна вважати ординарним.

4. За *зв'язком між вимогами* – на системи *без післядії і з післядією*. Якщо імовірність надходження вимог у систему в деякий момент часу не залежить від того, скільки вимог уже надійшло, тобто не зв'язана з передісторією досліджуваного процесу, то маємо систему без післядії, у противному разі – із післядією. Прикладом системи з післядією може служити потік, студентів, що здають залік викладачу.

5. За *реакцією вимоги на зайнятість каналів* – на системи *з відмовами* і *очікуванням.* Якщо вимога, яка тільки но надійшла на обслуговування, застає всі канали зайнятими і покидає систему, то маємо систему з відмовами.

6. *Системи з очікуванням* підрозділяються на системи з *обмеженим* і *необмеженим* очікуванням. Якщо вимога покидає систему,

коли черга досягла визначеного розміру, то маємо систему з обмеженим очікуванням. Прикладом може служити самоскид з розчином. Якщо час очікування настільки великий, що розчин може затвердіти, то самоскид доречно розвантажити в іншому місці. Якщо вимога, що надійшла, застає всі канали зайнятими і змушена очікувати своєї черги доти, поки вона не буде обслуговувана, то маємо систему з чеканням без обмеження. Приклад: літак, що знаходиться на аеродромі з чеканням звільнення злітної смуги.

7. *За способом вибору вимог на обслуговування* – на системи:

з пріоритетом вимог,

у міру надходження вимог,

з випадковим вибором вимог,

остання вимога обслуговується першою.

Якщо система масового обслуговування охоплює декілька категорій вимог і за якими-небудь розуміннями визначається порядок їх вибору на обслуговування, то маємо систему з пріоритетом вимог. Так, при надходженні виробів на будівельний майданчик в першу чергу монтуються ті, що обумовлені будівельною технологією.

Якщо канал, що звільнився, обслуговує вимогу, що надійшла в систему раніше інших, то маємо систему обслуговування вимог у міру їх надходження. Наприклад, покупець, що підійшов першим до продавця, обслуговується першим.

Якщо вимоги з черги в канал обслуговування поступають випадково, то маємо систему з випадковим вибором вимог на обслуговування. Приклад: вибір слюсарем-сантехніком однієї з декількох заявок від мешканців, про час надходження котрих слюсар не має ніякого уявлення.

Якщо на обслуговування вибирається остання вимога, що надійшла, то маємо систему з вибором «останній обслуговується першим». Так, при укладанні будівельних виробів у штабель зручніше брати зі штабеля (черги) виріб, покладений останнім.

8. За *часом обслуговування* вимоги – на системи з *детермінованим* і *випадковим часом* обслуговування. Якщо інтервал часу між моментом надходження вимоги в канал обслуговування і моментом виходу вимоги з каналу постійний, то маємо систему з детермінованим часом обслуговування, у противному разі – з випадковим. Наприклад,

мийка автомобілів являє собою систему обслуговування з детермінованим часом обслуговування.

9. За *числом каналів обслуговування* – на одно- й багатоканальні системи. Так, при монтажі будинку може бути використаний один піднімальний кран (один канал обслуговування) або декілька (багато каналів обслуговування).

10. За *кількістю етапів обслуговування* – на одно- й багатофазні системи. Якщо канали обслуговування розташовані послідовно і неоднорідні, то маємо багатофазну систему обслуговування. Прикладом такої системи може служити обслуговування автомобілів на СТО (мийка, діагностика, заміна фільтрів і т.д.).

11. За *однорідністю вимог* – на системи з *однорідними* й *неоднорідними потоками* вимог. Так, якщо під навантаження прибувають фургони однієї вантажопідйомності, то маємо систему з однорідним потоком вимог, якщо різної – то з неоднорідним.

12. За *обмеженням потоку вимог* – на *замкнуті* й *розімкнуті* системи. Якщо потік вимоги обмежений і вимоги, що покидають систему, через якийсь час до неї повертаються, то маємо замкнуту систему, у противному разі – розімкнуту. Прикладом замкнутої системи може служити ремонтна бригада та устаткування, що обслуговується ремонтною бригадою.

13. *За завантаженістю каналів* – на *впорядковані* і *невпорядковані* системи. У впорядкованих системах обслуговуючі канали завантажені нерівномірно. Вимога, що надійшла, обслуговується строго визначеним каналом з наявних вільних, а саме каналом з найменшим номером (вважається, що всі канали пронумеровані). У невпорядкованих системах всі канали рівноправні й вимога, що надійшла, обслуговується одним із вільних каналів без якоїсь переваги.

На рис.2.1 у вигляді структурної схеми наведена спрощена класифікація систем масового обслуговування.

Якщо ретельно досліджені або задані вхідні потоки вимог, механізм (число каналів обслуговування, тривалість обслуговування і т.д.) і спосіб вибору вимог на обслуговування, то з'являються умови для побудови математичної моделі системи. Така лежить в основі вирішення будь-якої задачі масового обслуговування.

Рис.2.1 – Класифікація систем масового обслуговування

Задачі масового обслуговування умовно поділяють на задачі *аналізу* і *задачі* синтезу. Перші дозволяють визначити основні параметри функціонування системи масового обслуговування при незмінних, наперед заданих вихідних характеристиках: структурі системи, способі вибору вимоги на обслуговування, потоках вимог і законах розподілу часу на їхнє обслуговування. Другі (задачі синтезу) спрямовані на пошук оптимальних параметрів систем масового обслуговування.

Як відзначалося раніше, загальною метою вивчення процесів масового обслуговування і вирішення більшості задач з теорії масового обслуговування слід вважати оцінку якості функціонування обслуговуючої системи і виявлення умов забезпечення її успішної роботи зі своєчасного задоволення вимог, що поступають на обслуговування.

Примітка. Надалі поряд з використанням терміну «канал» будуть використовуватися терміни «апарат», «прилад» та ін.

Якість функціонування систем масового обслуговування оцінюється подвійно: з боку інтересів вимог, що поступають на обслуговування, і з боку інтересів обслуговуючої системи.

Треба розмежовувати критерії якості обслуговування залежно від типу системи. У системах з відмовою такими критеріями служать:

середній відсоток заявок, що одержали відмову;

імовірність відмови черговій вимозі;

імовірність того, що обслуговуванням зайняти всі або визначена кількість із наявних каналів та ін.

У системах з очікуванням без обмежень критеріями якості обслуговування служать:

середня довжина черги та імовірність її утворення;

середній час очікування початку обслуговування;

імовірність того, що обслуговуючі канали зайняті або вільні та ін.

При оцінці функціонування систем масового обслуговування, крім перерахованих критеріїв, можуть бути використані такі *вартісні показники*:

вартість обслуговування кожної вимоги в системі;

вартість утрат, пов'язаних з простоєм вимог у черзі в одиницю часу;

вартість збитків, пов'язаних з утратою вимог системою;

вартість експлуатації кожного каналу системи в одиницю часу;

вартість одиниці часу простою каналу та ін.

У задачах масового обслуговування використовуються основні числові характеристики вхідного і вихідного потоків вимог, а також характер їх обслуговування. У цьому зв'язку для вирішення задачі раціональної організації обслуговуючої системи потрібно, насамперед, досліджувати і математично описати потік вимог і час обслуговування. Для цього використовуються дані фотографії робочого дня, дані диспетчерського та оперативного обліку.

Тема 2.3. Математико-статистична обробка виробничих даних

Випадкова неперервна величина характеризується двома основними параметрами: безліччю її можливих значень і імовірністю того, що вона прийме те або інше значення з цієї безлічі.

Як відомо, повне уявлення про випадкову величину дає закон її розподілу, що характеризується можливими значеннями випадкової величини і відповідних імовірностей. Імовірність у даному випадку є одним з основних понять математичної статистики і являє собою математичне визначення об'єктивної можливості того, що випадкова величина прийме те чи інше значення.

У літературі, присвяченій теоретичним дослідженням, доводиться, що найпростіший потік вимог, що поступають у систему в одиницю часу, підпорядковується *пуасонівському* закону розподілу. При цьому імовірність того, що в обслуговуючу систему за певний проміжок часу t надійде k вимог, обчислюється за формулою

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k}\ , \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ n, \qquad (2...1)$$

де $P_k(t)$ – імовірність одночасного надходження в обслуговуючу систему k вимог за досліджуваний проміжок часу; e – відома константа математичного аналізу, що являє собою суму нескінченного ряду $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots$ і є основою натуральної системи логарифмів (e =2,72); λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу; k – кількість вимог , що одночасно поступають; λt - середнє число вимог, що поступає за час t.

Особливістю випадкової величини, що описується функцією $P_k(t)$ для будь-якого значення t, є те, що вона (випадкова величина) може приймати тільки цілочислові значення 0, 1, 2, …, k і зі зростанням t не убуває.

Виявлення факту підпорядкування потоку вимог пуасонівському закону розподілу має теоретичну і практичну цінність. У випадку такого підпорядкування має місце так званий найпростіший потік вимог, що одночасно відзначається такими властивостями:

стаціонарністю – імовірністю одночасного надходження визначеної кількості вимог на обслуговування протягом досліджуваного проміжку часу Δt, що не залежить від початку його відліку, а тільки від тривалості спостереження;

ординарністю – імовірністю надходження двох і більше вимог за нескінченно малий період часу, що значно менша, ніж імовірність надходження однієї вимоги за цей період;

відсутність післядії – імовірністю надходження певної кількості вимог у проміжок часу Δt, що не залежить від того, скільки вимог вже надійшло в систему на обслуговування в будь-який інший проміжок часу, що не перетинається з даним періодом.

Два найпростіших потоки відрізняються один від одного тільки інтенсивністю – параметром λ, що визначається як математичне очікування числа вимог за одиницю часу.

У багатьох виробничих задачах масового обслуговування умови формування вимог такі, що припущення про їхню ординарність і відсутність цілком правомірні.

У той же час припущення про стаціонарність викликає великі сумніви, а іноді свідомо помилкове. Такі потоки називаються нестаціонарними найпростішими потоками.

Недотримання перерахованих властивостей найпростішого потоку вимог у виробничих умовах не заважає використанню математичного апарата і методів теорії масового обслуговування (орієнтованих на найпростіший потік вимог) для вирішення реальних задач. Це пояснюється наступними обставинами:

для інших видів потоків вимог, тобто крім найпростіших, поки не отримано простих формульних залежностей для кількісної оцінки функціонування систем масового обслуговування;

при розрахунку засобів обслуговування ми ставимо досліджуваний «найпростіший» потік вимог у більш важкі умови в порівнянні з іншими потоками з такою ж інтенсивністю надходження вимог, тобто результати розрахунку будуть свідомо прийнятними;

при об'єднанні декількох випадкових потоків утворюється сумарний потік, що за своїми характеристиками наближається до найпростішого.

Слід також мати на увазі, що при нестаціонарному потоці вимог практичні задачі можна вирішувати в такий спосіб:

весь інтервал часу функціонування системи масового обслуговування ділиться на відрізки, в межах яких можна вважати потік вимог постійним. Для кожного такого відрізка часу аналізується робота системи, наприклад, по змінах доби та ін.;

використання ЕОМ для моделювання процесу функціонування системи масового обслуговування.

Найпростіший потік у теорії масового обслуговування відіграє таку ж роль, як нормальний закон розподілу випадкової величини в теорії імовірності.

Якщо в результаті математико-статистичної обробки виробничих даних доведено, що досліджуваний потік вимог є найпростішим, тобто стаціонарним, ординарним і з відсутністю післядії, то для його повного опису досить обчислити математичне очікування числа вимог, що поступають в одиницю часу.

Приклад 2.1. Одним робітником опорного диспетчерського пункту обслуговуються шість будинків, кожний з яких обладнаний одним ліфтом. Середнє число будинків (ліфтів), що вимагають обслуговування протягом години, дорівнює трьом: $\lambda = 3$. Обчислити імовірність того, що протягом години рівно k ліфтів потребують обслуговування. Зробити розрахунки шуканих імовірностей для k = 0,1, … , 6...

Вирішення. Імовірність того, що протягом години буде потрібно обслуговування для k ліфтів, обчислюється за формулою

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \frac{1}{2{,}72^3}\cdot\frac{(3\cdot 1)^k}{k!} = 0{,}0497\,\frac{3^k}{k!}\ . \qquad (2.2)$$

Обчислені значення шуканої імовірності при k = 0,1, … , 6 подані в табл.2.1.

Таблиця 2.1

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_k(1)$	0,0498	0,1494	0,224	0,2241	0,168	0,1008	0,050

			1		0		4

Приклад 2.2. Нехай в умовах прикладу 2.1 середній час обслуговування одного ліфта дорівнює 10 і 20 *хв.* (1/6 і 1/3 *год.*). Яка імовірність того, що за 10 і 20 *хв.*:

а) не буде працювати більше k ліфтів?

б) не буде працювати не менше k ліфтів?

в) не буде працювати менше k ліфтів?

г) буде працювати не менше k ліфтів?

Вирішення. Спочатку визначимо імовірності того, що за 10 і 20 *хв.* не будуть працювати рівно k ліфтів, за допомогою наступних виразів:

$$P_k\left(\tfrac{1}{6}\right)=e^{-3\cdot\frac{1}{6}}\cdot\frac{\left(3\cdot\frac{1}{6}\right)^k}{k!}=\frac{1}{2{,}72^{-0{,}5}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}=0{,}606\frac{1}{2^k\,k!}\ ; \qquad (2.3)$$

$$P_k\left(\tfrac{1}{3}\right)=e^{-3\cdot\frac{1}{3}}\cdot\frac{\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)^k}{k!}=\ \frac{1}{2{,}72}\cdot\frac{1}{k!}=0{,}3676\frac{1}{k!}\ . \qquad (2.4)$$

Результати розрахунків при різних значеннях k зведені в табл. 2.2.

Таблиця 2.2

k (кількість непрацюючих ліфтів)	0	1	2	3	4	5	6
l = 6-k (кількість працюючих ліфтів)	6	5	4	3	2	1	0
$P_k\left(\frac{1}{6}\right)$	0,606	0,303	0,076	0,013	0,002	0,000	0,000
$P_k\left(\frac{1}{3}\right)$	0,368	0,368	0,184	0,061	0,015	0,003	0,001

Потім, використовуючи дані табл.2.2, визначимо шукані імовірності.

а) Імовірність того, що за 10 і 20 *хв.* не буде працювати більше k ліфтів, визначається за формулою

$$P_{>k}(t)=P_{k+1}(t)+P_{k+2}(t)+...+P_6(t)\ . \tag{2.5}$$

Так, імовірність того, що протягом 10 хв. не буде працювати більше трьох ліфтів, визначається за виразом

$$P_{>2}(t)=P_3(t)+P_4(t)+P_5(t)+P_6(t)=$$

$$=0{,}013+0{,}002+0+0=0{,}015\ . \tag{2.6}$$

б) Імовірність того, що за 10 і 20 *хв.* не буде працювати не менше k ліфтів, визначається за формулою

$$P_{\geq k}(t)=P_k(t)+P_{k+1}(t)+...+P_6(t)\ . \tag{2.7}$$

Так, імовірність того, що протягом 20 хв. не буде працювати не менше трьох ліфтів, визначається за виразом

$$P_{\geq 3}\left(\tfrac{1}{3}\right)=P_3\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_4\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_5\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_0\left(\tfrac{1}{3}\right)=$$

$$=0{,}061+0{,}015+0{,}003+0{,}001=0{,}080. \tag{2.8}$$

в) Імовірність того, що за 10 і 20 *хв.* не буде працювати менше k ліфтів, визначається за формулою

$$P_{<k}(t)=P_{k-1}(t)+P_{k-2}(t)+...+P_0(t)\ . \tag{2.9}$$

Так, імовірність того, що протягом 10 хв. буде працювати менше трьох ліфтів, визначається за виразом

$$P_{<3}\left(\tfrac{1}{6}\right)=P_2\left(\tfrac{1}{6}\right)+P_1\left(\tfrac{1}{6}\right)+P_0\left(\tfrac{1}{6}\right)=$$

$$=0{,}606+0{,}303+0{,}076=0{,}985\ . \tag{2.10}$$

г) Імовірність того, що протягом 10 і 20 *хв*. буде працювати менше l ліфтів, визначається за формулою

$$P_{\geq l}(t)=P_0(t)+P_1(t)+...+P_l(t)\ . \tag{2.11}$$

Так, імовірність того, що протягом 20 хв. буде працювати не менше трьох ліфтів, визначається за виразом

$$P_{\geq 3}\left(\tfrac{1}{3}\right)=P_0\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_1\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_2\left(\tfrac{1}{3}\right)+P_3\left(\tfrac{1}{3}\right)=$$

$$= 0{,}368 + 0{,}368 + 0{,}184 + 0{,}061 = 0{,}981\,. \qquad (2.12)$$

Результати розрахунку всіх необхідних імовірностей у прикладі 2.2 наведені в табл.2.3. Контрольні результати, отримані за допомогою виразів (2.6), (2.8), (2.10) і (2.12), у табл.2.3 виділені напівжирним шрифтом.

Таблиця 2.3

k	0	1	2	3	4	5	6
$P_{>k}\left(\frac{1}{6}\right)$	0,394	0,091	**0,015**	0,002	0,000	0,000	
$P_{>k}\left(\frac{1}{3}\right)$	0,632	0,264	0,080	0,019	0,004	0,001	
$P_{\geq k}\left(\frac{1}{6}\right)$	1	0,394	0,091	0,015	0,002	0,000	0,000
$P_{\geq k}\left(\frac{1}{3}\right)$	1	0,632	0,264	**0,080**	0,019	0,004	0,001
$P_{<k}\left(\frac{1}{6}\right)$		0,606	0,909	**0,985**	0,998	1	1
$P_{<k}\left(\frac{1}{3}\right)$		0,368	0,736	0,920	0,981	0,996	0,999
$l = 6 - k$	6	5	4	3	2	1	0
$P_{\geq l}\left(\frac{1}{6}\right)$	0,606	0,909	0,985	0,998	1	1	1
$P_{\geq l}\left(\frac{1}{3}\right)$	0,368	0,736	0,920	**0,981**	0,996	0,999	1

Приклад 2.3. В умовах прикладу 2.2 визначити, як часто робітник зустрінеться із ситуацією, коли:

а) усі ліфти потребують обслуговування, тобто одночасно зупиниться більше п'яти ліфтів?

б) обслуговування потребують не менше двох ліфтів?

Вирішення. Для відповідей на запитання прикладу скористаємося табл.2.3.

а) Як видно з табл.2.3, імовірності того, що за 10 і 20 *хв.* зупиниться більше 5 ліфтів, рівні 0 із похибкою не більше 0,001. Оскільки імовірності дуже малі, то можна вважати, що одночасна зупинка всіх ліфтів – подія неможлива, і робітник із такою ситуацією протягом робочої зміни не зустрінеться.

б) Як видно з табл.2.3, імовірності того, що за 10 і 20 *хв.* обслуговування потребують не менше двох ліфтів, відповідно рівні:

$P_{\geq 2}\left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}091$ і $P_{\geq 2}\left(\frac{1}{3}\right) = 0{,}264$. Покажемо, що за семигодинний робочий день робітник, який обслуговує ліфти, приблизно 4 – 6 разів зустрінеться із ситуацією, коли протягом 10 і 20 *хв.* треба обслужити не менше двох ліфтів. Це випливає з простих міркувань. У робочій зміні нараховується 42 (6 · 7) десятихвилинних інтервалів , що не перетинаються , і 21 (3 · 7) двадцятихвилинних інтервалів , що не перетинається. Примножуючи число інтервалів на імовірність появи не менше двох вимог, ми одержимо шукані рішення, а саме: $42 \cdot 0{,}91 = 3{,}82 \approx 4$ (для десятихвилинних інтервалів); $21 \cdot 0{,}264 = 5{,}544 \approx 6$ (для двадцятихвилинних інтервалів).

Ми розглянули три приклади, в яких початкове знання інтенсивності найпростішого потоку вимог λ дозволило відповісти на дуже важливі запитання. Як визначається інтенсивність конкретного потоку вимог?

Для встановлення λ конкретного потоку вимог не треба мати статистичні дані про поведінку потоку вимог у вигляді генеральної сукупності чисел, одержуваних в результаті досить тривалого спостереження за потоком. Використовуючи методи побудови закону розподілу випадкової величини, що вивчалися в курсі «Теорія імовірностей і математична статистика», можна одержати основний параметр λ (якщо досліджувана випадкова величина розподілена за експоненціальним законом). При цьому для побудови закону розподілу використовують не всю генеральну сукупність, а деяку вибірку з неї. Якщо вибірка становить незначну частину генеральної сукупності, то це може послужити причиною помилкового визначення λ.

Основою вивчення випадкової величини є побудови статистичного ряду розподілу за даними вибірки.

Статистичний (емпіричний) ряд розподілу – це таблиця, що складається з двох рядків. У першому рядку в порядку зростання вказуються діапазони можливих значень випадкової величини, у другому – відносні частоти влучення значень випадкової величини з вибірки у вказані діапазони.

Побудову статистичного ряду розподілу випадкової величини здійснюють у наступному порядку.

Серед вибіркової сукупності даних визначають x_{min} і x_{max}.. Весь діапазон зміни випадкової величини розбивають на рівні інтервали довжиною Δx . Розмір Δx знаходять в такий спосіб:

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \ , \tag{2.13}$$

де k вибирають з табл.2.4.

Таблиця 2.4 – Таблиця вибору числа інтервалів для статистичного ряду розподілу в залежності від об'єму вибірки

Об’єм вибірки n	100	200	400	600	800	1000	1500	2000
Кількість інтервалів k	12	16	20	24	27	30	35	37

Потім визначають частоту влучення значень випадкової величини x в i-й інтервал – m_i (i =1, 2, … , k), після чого обчислюють відносні частоти $P_i = \frac{m_i}{n}$, де n – обсяг вибірки. Результати розрахунку зводять у табл.2.5, що і являє собою статистичний ряд розподілу досліджуваної випадкової величини x.

Таблиця 2.5 – Статистичний ряд розподілу

Інтервали випадкової величини	$(x_{\min}, x_{\min}+\Delta x)$	$(x_{\min}+\Delta x, x_{\min}+2\Delta x)$	$\cdots$	$(x_{\min}+(k-1)\Delta x, x_{\max})$
Відносні частоти	P_1	P_2	$\cdots$	P_k

Статистичний ряд розподілу дозволяє побудувати гістограму відносних частот. Для цього визначають щільність відносних частот за формулою

$$H_i = \frac{P_i}{\Delta x} \ . \tag{2.14}$$

Узявши H_i як ординату на i-му інтервалі, одержимо гістограму відносних частот.

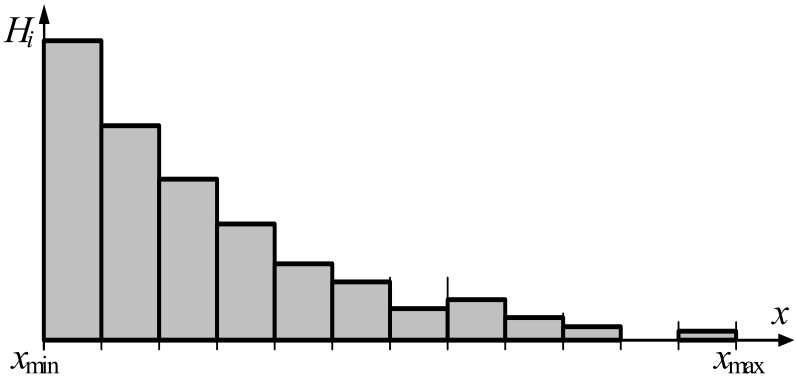


Рис.2.2 – Приклад гістограми відносних частот при виборці обсягом n = 100 для випадкової величини x, розподіленої за експоненціальним законом

За видом гістограми (якщо вона аналогічна гістограмі, зображеній на рис.2.2) переконуються в експоненціальному характері закону розподілу випадкової величини x, після чого визначають параметр λ за формулою

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{m}_n} \ , \tag{2.15}$$

де $\tilde{m}_n$ – середнє значення випадкової величини за даними вибіркової сукупності, $\tilde{m}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Стосовно до пуасонівського розподілу, якщо проміжок часу між надходженням вимог $(0 \ , t \ )$ триватиме менше t одиниць часу, то імовірність того, що в систему не надійде жодної вимоги, визначиться за формулою

$$P_0(t) = \ell^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = \ell^{-\lambda t} \quad . \qquad (2.16)$$

Імовірність протилежної події, коли в систему поступає хоча б одна вимога, розподіл проміжків, вільних від вимог, описується показовим інтегральним законом у вигляді

$$F(t) = P(T < t) = 1 - \ell^{-\lambda t} \quad . \qquad (2.17)$$

Щільність розподілу, що являє собою першу похідну від інтегральної функції, має вигляд

$$f(t) = F'(t) = \lambda \ell^{-\lambda t} \quad . \qquad (2.18)$$

Таким чином, проміжки часу між вимогами підпорядковані показовому закону розподілу з параметром λ. При цьому можна стверджувати і зворотне: якщо час між вимогами розподілено за показовим законом, то потік вимог підпорядковується закону Пуассона, тобто

$$Pk(t) = \ell^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \leftrightarrow f(t) = \lambda \ell^{-\lambda t} \quad . \qquad (2.19)$$

Повною характеристикою *часу обслуговування* є закон розподілу, параметри якого також визначають на основі виробничих даних.

Вирішення такого задачі проводять при обмеженій кількості спостережень шляхом вирівнювання емпіричного ряду розподілу і знаходження теоретичної кривої, що описує вже не вибіркову сукупність, а досліджувану випадкову величину.

Послідовність розрахунків:

укладання статистичного ряду розподілу;

побудова гістограми і припущення про вид закону розподілу експериментальних даних;

обчислення параметра (у загальному випадку – параметрів) передбачуваного закону розподілу;

визначення відповідності теоретичної кривої розподілу емпіричним даним (перевірка гіпотези про відповідність).

Частково процедура розрахунку, крім останнього пункту, вже була розглянута в цьому розділі.

Тема 2.4. Показники ефективності систем масового обслуговування

Показники ефективності систем масового обслуговування діляться на показники *технічні*, що характеризують якість і умови роботи обслуговуючої системи, і показники *економічні*, що відображають економічні особливості системи.

Показники першої групи звичайно формують на основі отриманих з розрахунків значень імовірностей станів системи. Показники другої групи розраховують на основі показників першої групи.

2.4.1. Технічні показники ефективності систем масового обслуговування

Серед технічних показників можна виділити наступні:

1) *Імовірність відмови в обслуговуванні*. Імовірність того, що вимога, яка поступає в систему, відмовиться приєднуватися до черги і *втрачається* системою - $P_{\text{відм}}$. Цей показник для системи масового обслуговування з відмовами дорівнює імовірності того, що в системі знаходиться стільки вимог, скільки вона містить каналів обслуговування:

$$P_{\text{відм}} = P_r, \tag{2.20}$$

де r – число каналів обслуговування.

Для системи з обмеженою довжиною черги $P_{\text{відм}}$ дорівнює імовірності того, що в системі знаходиться $r + k$ вимог:

$$P_{\text{відм}} = P_{r+k}, \tag{2.21}$$

де k – припустима довжина черги.

Протилежним показником є імовірність обслуговування вимоги

$$P_{\text{обсл}} = 1 - P_{\text{відм.}} \tag{2.22}$$

2) *Середня кількість вимог, що очікують обслуговування*,

$$M_{\text{оч}} = \sum_{i=r+1}^{r+k} (i-r) P_i \ , \tag{2.23}$$

де P_i – імовірність того, що в системі знаходиться i вимог.

За умови найпростішого потоку вимог і експоненціального закону розподілу часу обслуговування формула (2.23) приймає такий вид:

для систем з обмеженою довжиною черги

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r} \right)^i , \tag{2.24}$$

де $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, λ – інтенсивність вхідного потоку вимог (середнє число вимог, що поступають в одиницю часу), μ – інтенсивність обслуговування (середнє число обслугованих вимог в одиницю часу);

для систем з очікуванням

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\rho}{r}\right)^2} , \tag{2.25}$$

3) *Відносна й абсолютна пропускні спроможності* системи, які визначають за наступними формулами:

відносна пропускна спроможність – за формулою

$$Q = 1 - P_{\text{відм.}} \tag{2.26}$$

абсолютна пропускна спроможність – за формулою

$$A = \lambda Q . \tag{2.27}$$

4) *Середнє число зайнятих обслуговуванням каналів* у випадку експоненціального характеру потоку вимог і часу обслуговування

$$\bar{r}_з = \rho Q . \tag{2.28}$$

Для систем масового обслуговування з відмовами середнє число зайнятих обслуговуванням каналів можна знайти за формулою

$$\bar{r}_з = \sum_{i=1}^{r} i \cdot P_i . \tag{2.29}$$

5) *Загальна кількість вимог*, що знаходяться в системі *M.* Цей показник визначають наступним способом:

для систем масового обслуговування з відмовами

$$M = r_з \,, \tag{2.30}$$

для систем масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

$$M = r_з + M_{\text{оч.}} \tag{2.31}$$

6) *Середній час очікування вимогами початку обслуговування*. Якщо відома функція розподілу імовірності часу очікування вимогою початку обслуговування

$$F(t) = P(T_{\text{оч}}<t)\,, \tag{2.32}$$

то середній час очікування вимогами початку обслуговування $\overline{T}_{\text{оч}}$ визначається як математичне очікування випадкової величини $T_{\text{оч}}$

$$\overline{T}_{\text{оч}} = M\left[T_{\text{оч}}\right] = \int_0^{\infty} t dF \tag{2.33}$$

при показовому (експоненціальному) законі розподіли вимог у вхідному потоці $\overline{T}_{\text{оч}}$ *можна визначити за формулою*

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{M_{\text{оч}}}{\lambda} \;. \tag{2.34}$$

2.4.2. Економічні показники ефективності систем масового обслуговування

Показники, що характеризують економічні особливості систем масового обслуговування, звичайно формують відповідно до конкретного виду системи і її призначення. Одним із загальних показників є *економічна ефективність системи*

$$E = P_{\text{обсл}}\, \lambda c T - G \;, \tag{2.35}$$

де c – середній економічний ефект, отриманий при обслуговуванні однієї вимоги; T – розглянутий інтервал часу; G – величина втрат у системі.

Останню величину (втрати) можна визначити таким чином:

для систем з відмовами

$$G = \left(c_{\text{е}} r_{\text{з}} + c_{\text{зб}} P_{\text{відм}} \lambda + c_{\text{п}} r_{\text{вк}}\right) T \;, \qquad (2.36)$$

де $c_{\text{е}}$ – вартість експлуатації одного каналу в одиницю часу; $c_{\text{зб}}$ – вартість збитків у результаті відходу вимог із системи в одиницю часу; $c_{\text{п}}$ – вартість одиниці часу простою каналу обслуговування; $r_{\text{вк}}$ – середнє число вільних каналів (що простоюють), $r_{\text{вк}} = \text{r} - \text{r}_{\text{з}}$;

для систем з очікуванням

$$G = \left(c_{\text{е}} r_{\text{з}} + c_{\text{оч}} M_{\text{оч}} \lambda + c_{\text{п}} r_{\text{вк}}\right) T \;, \qquad (2.37)$$

де $c_{\text{оч}}$ – вартість втрат, пов'язаних з простоєм вимоги в черзі в одиницю часу.

Тема 2.5. Ланцюги Маркова і рівняння Колмогорова для систем масового обслуговування

Для одержання і графічної інтепретації математичних моделей систем масового обслуговування їх зручно представляти у вигляді ланцюгів Маркова. Ланцюг Маркова являє собою розмічений граф станів, тобто орієнтований граф у вигляді ланцюжка прямокутних блоків (вершин), з'єднаних функціональними зв'язками (спрямованими дугами).

Вершина графа інтепретується як одне з можливих станів системи. Стан системи масового обслуговування будемо зв'язувати з імовірністю числа вимог, що знаходяться в системі:

у системі немає жодної вимоги – імовірність стану P_0;

у системі знаходиться одна вимога – імовірність стану P_1;

. . .

у системі знаходиться m вимог – імовірність стану P_{m};

Дуги графа інтепретуються як процеси переходу з одного стану в інший. Процеси переходу будемо зв'язувати з інтенсивністю їх появи в системі. При цьому вважаємо, що потік вхідних вимог є простим (пуассонівським), а час обслуговування підпорядковується експоненціальному закону. Кожний канал може обслуговувати тільки одну вимогу.

Розглянемо Марківські ланцюги для найбільш поширених систем масового обслуговування.

2.5.1. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з необмеженим часом очікування

Ланцюг Маркова для даної системи показано на рис. 2.3.

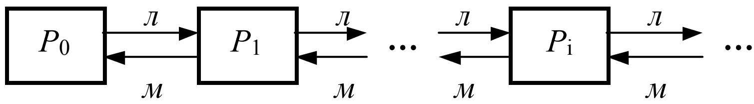


Рис.2.3

Кожний прямокутний блок визначає один з можливих станів системи і кількісно оцінюється імовірністю стану. Стрілки (дуги) показують, в який стан система може перейти і з якою інтенсивністю.

Оскільки час очікування в системі необмежений, то система може накопичувати нескінченну множину вимог, що очікують обслуговування. Тому ланцюг Маркова нескінчений. Кількість вимог у системі i може змінюватися від 0 до ∞. Оскільки потік вимог ординарний, то вимоги поступають по одній.

Перший прямокутник з імовірністю P_0 визначає стан системи масового обслуговування, при якому її єдиний канал простоює через відсутність вимог на обслуговування. З цього положення система може перейти з інтенсивністю λ тільки в стан P_1, тоді система буде зайнята обслуговуванням вимоги. Зі стану P_1 система може з інтенсивністю μ перейти в стан P_0 (у системі знаходилася одна вимога, але вона була обслуговувана раніше, ніж з'явилося нова вимога) і стати вільної або з інтенсивністю λ – у стан P_2. У цьому випадку в системі будуть знаходитися 2 вимоги, одна з яких – у стані очікування (черга з одною вимогою). Зі стану P_2 система може з інтенсивністю μ перейти в стан P_1 і бути зайнята обслуговуванням однієї вимоги з ліквідацією черги або з інтенсивністю λ перейти в стан P_3. У цьому випадку в системі будуть знаходитися 3 вимоги, дві з яких – у стані очікування обслуговування, і т.д.

2.5.2. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з необмеженим часом очікування

Ланцюг Маркова для даної системи показано на рис. 2.4.

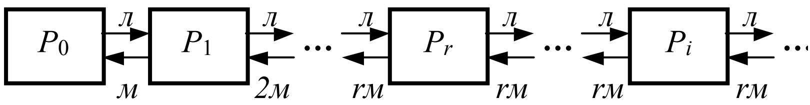


Рис.2.4

Система може одночасно обслуговувати від 0 до r вимог.

На відміну від одноканальної у r-канальній системі черга утворюється тільки тоді, коли система знаходиться у стані P_r (всі канали зайняті) і при цьому нова вимога поступає в систему раніш, ніж звільниться який-небудь із зайнятих каналів.

Коли всі канали зайняті (стан P_r) або черга не порожня (стан P_i, $i > r$) інтенсивність обслуговування є величиною постійною і рівною $r\mu$.

2.5.3. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженим часом очікування

Ланцюг Маркова для даної системи показано на рис. 2.5.

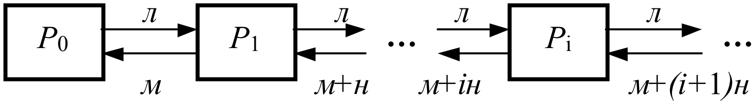


Рис.2.5

У системах масового обслуговування з обмеженим часом очікування час очікування в черзі кожної вимоги обмежений випадковою величиною $t_{\text{ож}}$, середнє значення якої $\bar{t}_{\text{ож}}$.

Розмір, зворотний середньому часу очікування, означає кількість вимог, що покидають чергу в одиницю часу, викликане появою в черзі однієї вимоги: $\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$.

При наявності в черзі i вимог інтенсивність потоку вимог , що покидають $i\nu$ чергу , складає (див. Рис.2.5).

2.5.4. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з обмеженим часом очікування

Ланцюг Маркова для даної системи показаний на рис. 2.6.

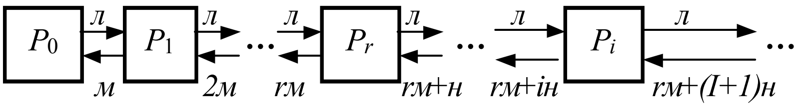


Рис.2.6

Система може одночасно обслуговувати від 0 до r вимог.

На відміну від одноканальної у r-канальній системі черга утворюється тільки тоді, коли система знаходиться в стані P_r (усі канали зайняті), при цьому нова вимога поступає в систему раніше, ніж звільниться який-небудь із зайнятих каналів.

Коли всі канали зайняті (стан P_r) або черга не порожня (стан P_i, $i>r$), інтенсивність обслуговування не є величиною постійною і визначається виразом $r\mu+(i+1)\nu$.

2.5.5. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

Ланцюг Маркова для даної системи з допустимою довжиною черги, рівною k, показаний на рис. 2.7.

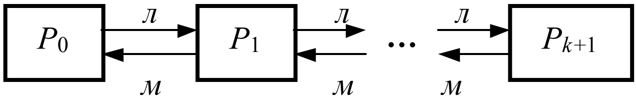


Рис.2.7

У системах масового обслуговування з обмеженою довжиною черги число вимог у системі може змінюватися від 0 до k +1. Коли число вимог досягає величини k+1, одна з них знаходиться на обслуговуванні, а k – у черзі, очікуючи обслуговування.

2.5.6. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

Ланцюг Маркова для даної системи з допустимою довжиною черги, рівною k, показано на рис. 2.8.

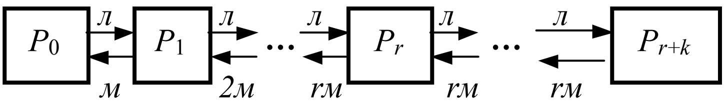


Рис.2.8

Система може одночасно обслуговувати від 0 до r вимог.

На відміну від одноканальної у r-канальній системі черга утворюється тільки тоді, коли в система знаходиться в стані P_r (всі канали зайняті), при цьому нова вимога поступає в систему раніше, ніж звільниться який-небудь із зайнятих каналів.

Коли всі канали зайняті (стан P_r) або черга не порожня (стан P_i, $r < i \le (r+k)$), інтенсивність обслуговування є величиною постійною і рівною $r\mu$.

2.5.7. Замкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженим потоком вимог

У замкнутих системах масового обслуговування джерело вимог знаходиться всередині системи, при цьому інтенсивність потоку вимог залежить від стану самої системи. Частіше всього потоком вимог у такій системі є потік несправностей від деякої групи працюючих пристроїв у кількості m. Як канал обслуговування можуть виступати і люди.

Ланцюг Маркова для замкнутої одноканальної системи масового обслуговування з обмеженим потоком вимог показано на рис. 2.9.

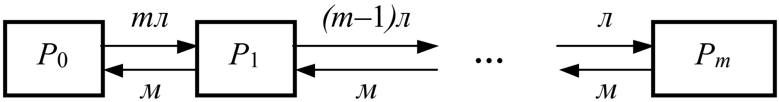


Рис.2.9

Коли в систему поступає вимога на обслуговування, то число працюючих каналів зменшується на одиницю. Відповідно зменшується інтенсивність надходження нової вимоги.

2.5.8. Замкнута багатоканальна система масового обслуговування з обмеженим потоком вимог

Ланцюг Маркова для даної системи показаний на рис. 2.10.

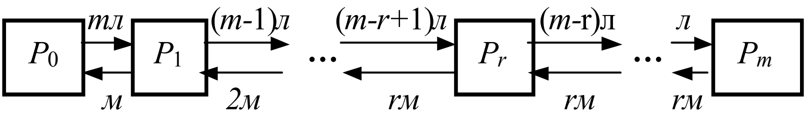


Рис.2.10

Система може одночасно обслуговувати від 0 до r вимог.

На відміну від одноканальної у r-канальній системі черга утворюється тільки тоді, коли система знаходиться в стані P_r (всі канали зайняті), при цьому нова вимога поступає в систему раніш, ніж звільниться який-небудь із зайнятих каналів.

Коли всі канали зайняті (стан P_r) або черга не порожня (стан P_i, $r < i \le m$), інтенсивність обслуговування є величиною постійною і рівною $r\mu$.

2.5.9. Одноканальна система масового обслуговування з відмовами

Ланцюг Маркова для даної системи показаний на рис.2.11.

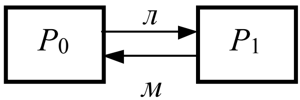


Рис.2.11

В одноканальній системі з відмовами, коли вона знаходиться в стані P_1 (єдиний канал зайнятий), нова вимога, що поступає до звільнення каналу, безповоротно втрачується.

2.5.10. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

Ланцюг Маркова для даної системи показано на рис.2.12.

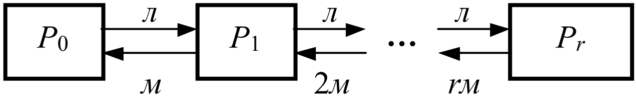


Рис.2.12

У багатоканальній системі з відмовами нова вимога безповоротно втрачається тільки тоді, коли система знаходиться в стані P_r (всі канали обслуговування зайняті).

Інтенсивність вихідного потоку вимог (обслугованих) залежить від числа зайнятих каналів: чим більше каналів зайнято обслуговуванням, тим вище інтенсивність.

2.5.11. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів

Системи, подані у вигляді неперервного ланцюга Маркова, звичайно досліджують за допомогою рівнянь Колмогорова для імовірностей станів.

Щільністю імовірності переходу λ_{ij} зі стану, що відповідає імовірності P_i, у стан, що відповідає імовірності P_j, називається межа відношення імовірності цього переходу за час Δt до довжини проміжку Δt, коли останній прагне до нуля:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{P_{ij}\left(\Delta t\right)}{\Delta t}, \tag{2.38}$$

де $P_{ij}\left(\Delta t\right)$ – імовірність того, що система, яка знаходиться в момент часу t у стані P_i, за час Δt перейде в стан P_j.

Марківський неперервний ланцюг називається *однорідним*, якщо щільності імовірностей λ_{ij} не залежать від часу t, у противному разі він називається *неоднорідним*.

Для однорідних марківських неперервних ланцюгів, що характеризують процеси «загибелі» і «розмноження», рівняння Колмогорова мають вигляд

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t);$$
$$\frac{dP_1}{dt} = \lambda_{01}P_0(t) - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{12}P_2(t);$$
$$\ldots$$
$$\frac{dP_i}{dt} = \lambda_{i-1,i}P_{i-1}(t) - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i(t) + \lambda_{i,i+1}P_{i+1}(t), \quad i = \overline{1,n},$$
$$\ldots$$
(2.39)

де $P_i(t)$ – імовірність стану, коли в системі знаходиться i вимог у момент часу t, $i = 1,2,\ldots,n+1$; $(n+1)$ – загальне число можливих станів.

При гіпотезі про стаціонарний режим роботи системи (імовірності станів не залежать від часу) рівняння Колмогорова (2.39) набувають вигляду:

$$-\lambda_{01}P_0 + \lambda_{10}P_1 = 0;$$
$$\lambda_{01}P_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1 + \lambda_{12}P_2 = 0;$$
$$\ldots$$
$$\lambda_{i-1,i}P_{i-1} - (\lambda_{i,i-1} + \lambda_{i,i+1})P_i + \lambda_{i,i+1}P_{i+1} = 0, \quad = \overline{1,n};$$
$$\ldots$$
(2.40)

У більшості практичних задач виявляється допустимим припущення про стаціонарний режим роботи систем масового обслуговування. Тому для одержання математичних моделей систем слід використовувати рівняння Колмогорова у вигляді (2.40).

Тема 2.6. Розімкнуті системи масового обслуговування

2.6.1. Розімкнута система масового обслуговування з необмеженим часом очікування

Для розімкнутих систем масового обслуговування з безупинним потоком вимог і необмеженим часом очікування обслуговування характерні такі особливості:

нескінченне число можливих станів i, що пов'язано з числом вимог у системі;

обмежене число r обслуговуючих каналів;

кожний канал здатний одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

при наявності вільного каналу вимога, що поступає до системи, негайно обслуговується;

вимога, що надійшла в систему в момент, коли всі r каналів обслуговування зайняті, стає в чергу очікування обслуговування;

теоретично черга вимог, що очікують обслуговування, нескінченна.

Задача визначення показників функціонування такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вихідними параметрами вирішення задачі служать:

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміру, що й потік вимог);

r – число обслуговуючих каналів.

Вищевказані параметри визначаються шляхом обробки виробничих спостережень за час продуктивної роботи сполучених робочих процесів і ланок виробництва.

Для вирішення задач даного типу використовують формули Ерланга.

1. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного (коефіцієнт завантаження)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \,. \tag{2.41}$$

2. *Імовірності одночасного перебування* i *вимог* у системі P_i визначаються за такими формулами:

імовірність одночасного перебування в системі 1-ї вимоги

$$P_1 = \rho P_0 \ , \tag{2.42}$$

де P_0 – імовірність відсутності вимог у системі;

імовірність одночасного перебування в системі 2-х вимог

$$P_2 = \frac{\rho}{2} P_1 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 \ , \tag{2.43}$$

імовірність одночасного перебування в системі 3-х вимог

$$P_3 = \frac{\rho}{3} P_2 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 \ , \tag{2.44}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі r вимог

$$P_r = \frac{\rho}{r} P_{r-1} = \frac{\rho^r}{r!} P_0 \ , \tag{2.45}$$

імовірність одночасного перебування в системі $r+1$ вимоги

$$P_{r+1} = \frac{\rho}{r} P_r = \frac{\rho^{r+1}}{r!r} P_0 \ , \tag{2.46}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі i вимог $(i>r)$

$$P_i = \frac{\rho}{r} P_{i-1} = \frac{\rho^i}{r!r^{i-r}} P_0, \quad i = \overline{r+1, \infty} \ , \tag{2.47}$$

. . .

Починаючи з $i=r$, послідовні значення P_i утворюють нескінченну геометричну прогресію зі знаменником $\frac{\rho}{r}$. Прогресія буде збіжною тільки у випадку, якщо знаменник прогресії опиниться менше одиниці. У результаті одержуємо необхідну умову функціонування розімкнутої системи: $\frac{\rho}{r} \le 1$, звідси $r \ge \rho$.

3. Імовірність відсутності вимог у системі P_0

Сума імовірностей усіх станів системи складається з двох складових і дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = \sum_{i=0}^{r-1} P_i + \sum_{i=r}^{\infty} P_i = 1 , \tag{2.48}$$

Перша складова в (2.48) являє собою імовірність того, що в системі вільний від обслуговування хоча б один канал. З урахуванням співвідношень (2.42) – (2.45) ця імовірність визначиться в такий спосіб:

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = \frac{\rho^0}{0!} P_0 + \frac{\rho^1}{1!} P_0 + \frac{\rho^2}{2!} P_0 + \cdots + \frac{\rho^r}{r!} P_0 = P_0 \sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} . \tag{2.49}$$

Друга складова в (2.48) являє собою суму нескінченної спадної геометричної прогресії з початковим членом $P_{r+1} = \frac{\rho^{r+1}}{r!r} P_0$ (див. формулу (2.46)) і знаменником $\frac{\rho}{r}$:

$$\sum_{i=r+1}^{\infty} P_i = P_0 \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} . \tag{2.50}$$

Підставляючи (2.49) і (2.50) у (2.48), одержуємо

$$\sum_{i=0}^{r} P_0 \frac{\rho^i}{i!} + P_0 \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} = 1 . \tag{2.51}$$

Звідки імовірність відсутності вимог у багатоканальній розімкнутій системі масового обслуговування з необмеженим часом очікування визначається виразом

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1} . \tag{2.52}$$

Для одноканальної системи, коли $r = 1$, вираз (2.52) спрощується

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho \ . \qquad (2.53)$$

4. Імовірність появи черги. Зайнятість усіх r каналів обслуговування, тобто наявність у системі r і більше вимог, означає появу черги. Тоді імовірність появи черги являє собою суму імовірностей того, що в системі знаходиться не менше r вимог:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{i=r}^{\infty} P_i \ , \qquad (2.54)$$

Сума (2.54) – це сума нескінченної спадної геометричної прогресії з початковим членом $P_r = \frac{\rho^r}{r!} P_0$ (див. формулу (2.45)) і знаменником $\frac{\rho}{r}$:

$$P_{\text{оч}} = \sum_{i=r}^{\infty} P_i = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)} \ . \qquad (2.55)$$

Для одноканальної системи імовірність появи черги визначається як імовірність протилежного стану стосовно стану, коли єдиний канал обслуговування вільний:

$$P_{\text{оч}} = 1 - P_0 = 1 - (1-\rho) = \rho \ . \qquad (2.56)$$

5. *Середня довжина черги* (див. формулу (2.25))

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{P_r \rho}{r} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} \ . \qquad (2.57)$$

Для одноканальної системи середня довжина черги

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^2}{(1-\rho)^2} \ . \qquad (2.58)$$

6. *Середній час очікування* обслуговування (див. формулу (2.34))

$$\overline{T}_{оч} = \frac{M_1}{\lambda} .$$

7. *Середнє число вільних каналів*

$$C = \sum_{i=0}^{r} P_i (r - i) . \qquad (2.59)$$

8. *Коефіцієнт простою каналу*

$$\gamma = \frac{C}{r} . \qquad (2.60)$$

Приклад 2.1. Потокову лінію для щоденного обслуговуванню туристів у готелі обслуговує бригада операторів. Момент надходження туристів на обслуговування має випадковий характер. Є підстава думати, що потік вимог на обслуговування підпорядковується пуассонівському закону розподілу, а час обслуговування – показовому. Потрібно оцінити роботу бригади, якщо число операторів = 4, λ =10 туристів на годину, а μ =2,5 туриста на годину. Вартість години простою номера $C_н$ =5,2 грн., тарифна ставка оператора $C_{ст}$ =1,7 грн.

Вирішення.

Перевіримо умову функціонування розімкнутої системи – число обслуговуючих каналів (операторів) r має бути більше або дорівнювати величині $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. У нашому випадку $\rho = \frac{10}{2,5} = 4$, r за умовою також дорівнює 4. Отже, умову функціонування системи не порушено.

Система працюватиме, але більшість показників функціонування системи будуть невизначеними, оскільки формули (2.52) – (2.60) були отримані за умови, що друга складова суми (2.48) являє собою нескінченну спадну геометричну прогресію. В умовах задачі знаменник прогресії $\frac{\rho}{r}$ дорівнює одиниці. У цьому випадку імовірність утворення черги також дорівнює одиниці, а імовірність того, що хоча б один канал обслуговування буде вільний, дорівнює нулю.

Приклад 2.2. Нехай в умовах *прикладу 2.1* треба оцінити роботу бригади, якщо число операторів $r = 5$.

Вирішення.

1. Перевіримо умови функціонування розімкнутої системи – число обслуговуючих каналів (операторів) r повинно бути більше або дорівнювати величині $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. У нашому випадку $\rho = \dfrac{10}{2{,}5} = 4$; за умовою r = 5. Оскільки $r > \rho$, то умова функціонування системи виконується.

2. Визначимо імовірності одночасного надходження i вимог (туристів) за формулою $P_i = \dfrac{1}{i!}\rho^i P_0$:

$$P_0 = 1 \cdot P_0 \;;$$

$$P_1 = \frac{1}{1!}4^1 P_0 = 4\,P_0 \;;$$

$$P_2 = \frac{1}{2!}4^2 P_0 = 8\,P_0 \;;$$

$$P_3 = \frac{1}{3!}4^3 P_0 = 10{,}6667\,P_0 \;;$$

$$P_4 = \frac{1}{4!}4^4 P_0 = 10{,}6667\,P_0 \;;$$

$$P_5 = \frac{1}{5!}4^5 P_0 = 8{,}5333\,P_0 \;;$$

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = 42{,}8667 P_0 \;.$$

3. Імовірність P_0 того, що всі оператори простоюють, визначимо за формулою (2.52):

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1} = \left(42{,}8667 + \frac{4^6}{5!(5-4)} \right)^{-1} = 0{,}013 \;.$$

4. Імовірність утворення черги знайдемо за формулою (2.55):

$$P_{\text{оч}} = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)} = 0{,}013 \frac{4^5}{(5-1)!(5-4)} = 0{,}5547 \text{ , або } 55{,}47\%.$$

5. Середню довжину черги визначимо за формулою (2.57):

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^{r+1}}{r \cdot r!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{0{,}013 \cdot 4^6}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = 2{,}22 \text{ } \textit{туриста}.$$

6. Середній час чекання кожним туристом початку обслуговування черги знайдемо за формулою (2.34):

$$\overline{T}_{\text{оч}} = \frac{2{,}22}{10} = 0{,}222 \text{ } \textit{год.}, \quad \text{або} \quad 13 \text{ } \textit{хв.}$$

7. Середнє число операторів черги, які простоюють, визначаємо за формулою (2.59):

$$C = \sum_{i=0}^{r} P_r (r - i) = 0{,}013 \cdot 5 + 4 \cdot 0{,}013 \cdot 4 + 8 \cdot 0{,}013 +$$
$$+ 10{,}667 \cdot 0{,}013 \cdot 2 + 10{,}667 \cdot 0{,}013 \cdot 1 = 1{,}002 \text{ } \textit{оп}.$$

8. Коефіцієнт простою операторів черги знаходимо за формулою (2.60):

$$\gamma = \frac{C}{r} = \frac{1{,}002}{5} = 0{,}2 \text{ , або } 20\% \text{ робочого часу.}$$

У зв'язку з великою імовірністю утворення черги і її середньої довжини доцільно чисельність операторів, які обслуговують потік туристів, збільшити до шести.

Приклад 2.3. Нехай в умовах *прикладу 2.1* треба оцінити роботу бригади, якщо число операторів $r = 6$.

Вирішення.

1. Перевіримо умови функціонування розімкнутої системи, У

нашому випадку $\rho = \dfrac{10}{2,5} = 4$; за умовою r = 6. Оскільки $r > \rho$, то умова функціонування системи виконується.

2. Імовірності одночасного надходження i вимог (туристів):

$$P_0 = 1 \cdot P_0 \ ;$$

$$P_1 = \frac{1}{1!} 4^1 P_0 = 4\, P_0 \ ;$$

$$P_2 = \frac{1}{2!} 4^2 P_0 = 8\, P_0 \ ;$$

$$P_3 = \frac{1}{3!} 4^3 P_0 = 10,6667\, P_0 \ ;$$

$$P_4 = \frac{1}{4!} 4^4 P_0 = 10,6667\, P_0 \ ;$$

$$P_5 = \frac{1}{5!} 4^5 P_0 = 8,5333\, P_0 \ ;$$

$$P_6 = \frac{1}{6!} 4^6 P_0 = 5,6889\, P_0 \ ;$$

$$\sum_{i=0}^{r} P_i = 48,5556 P_0 \ .$$

3. Імовірність P_0 того, що всі оператори простоюють,

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r!(r-\rho)} \right)^{-1} = \left(48,5556 + \frac{4^7}{6!(6-4)} \right)^{-1} = 0,0167 \ .$$

4. Імовірність утворення черги

$$P_{\text{оч}} = P_0 \frac{\rho^r}{(r-1)!(r-\rho)} = 0,0167 \frac{4^6}{(6-1)!(6-4)} = 0,2850 \text{ , або}$$

$$28{,}5\%.$$

5. Середня довжина черги

$$M_{\text{оч}}=\frac{P_0\rho^{r+1}}{r\cdot r!}\frac{1}{\left(1-\frac{\rho}{r}\right)^2}=\frac{0{,}0167\cdot 4^7}{6\cdot 6!}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{4}{6}\right)^2}=0{,}57\ \textit{туриста}.$$

6. Середній час очікування кожним туристом початку обслуговування

$$\overline{T}_{оч}=\frac{0{,}57}{10}=0.057\ \textit{год.},\quad \text{або}\quad 3{,}42\ \textit{хв.}$$

7. Середнє число операторів, які простоюють,

$$C=\sum_{i=0}^{r}P_r(r-i)=0{,}0167\cdot 6+4\cdot 0{,}0167\cdot 5+8\cdot 0{,}0167\cdot 4+$$
$$+10{,}6667\cdot 0{,}0167\cdot 3+10{,}6667\cdot 0{,}0167\cdot 2+$$
$$+8{,}5333\cdot 0{,}0167\cdot 1=2{,}0018\ \textit{оп.}$$

8. Коефіцієнт простою операторів

$$\gamma=\frac{C}{r}=\frac{2{,}0018}{6}=0{,}3336\ \text{, або}\ 33{,}36\%\ \text{робочого часу.}$$

Доцільності збільшення чисельності робітників необхідно дати техніко-економічне обґрунтування. Обґрунтування робитиме шляхом зіставлення збитків від простою туристів у черзі з додатковими витратами, пов'язаними з утриманням штату операторів готелю (виплата заробітної плати, забезпечення житлом, надання транспорту та ін.).

Обґрунтуємо збільшення чисельності операторів у *прикладі 2.3* в порівнянні з *прикладом 2.2,* виходячи з вартості години номера готелю і годинної тарифної ставки оператора. Для цього складемо табл.2.6.

Таблиця 2.6

Кількість операторів r	Збитки готелю $C_{\text{н}}M_{\text{оч}}+tC$ (*грн.*)

5	$5{,}2 \cdot 2{,}22 + 1{,}7 \cdot 1{,}002 = 13{,}25$
6	$5{,}2 \cdot 0{,}57 + 1{,}7 \cdot 2{,}0018 = 6{,}65$

Отже, збитки підприємства (готелі) значно знизяться, якщо туристів буде обслуговувати бригада операторів із шести чоловік, але остаточні висновки можна зробити тільки після комплексного обстеження підприємства.

2.6.2. Комп'ютерне обчислення показників розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування

Розрахунок показників систем масового обслуговування будь-якого типу вимагає значних тимчасових витрат на проведення складних обчислювальних процедур. Щоб значно скоротити час розрахунку показників (на декілька порядків!) і усунути помилкові дії, властиві людині, яка виконує рутинні обчислювальні процедури, треба використовувати комп'ютерну техніку.

Для комп'ютерного обчислення показників розімкнутої стаціонарної системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування рекомендується застосовувати інформаційну систему *Microsoft Excel,* що має потужні засоби виконання табличних обчислювальних процедур. Розглянемо використання системи *Microsoft Excel* для розрахунку показників систем *масового обслуговування з необмеженим часом очікування* у рамках *прикладів 2.2 – 2.3.*

На рис.2.13 показана електронна таблиця для проведення розрахунків показників п’ятиканальної системи масового обслуговування з необмеженим часом чекання (див. *приклад 2.2*) .

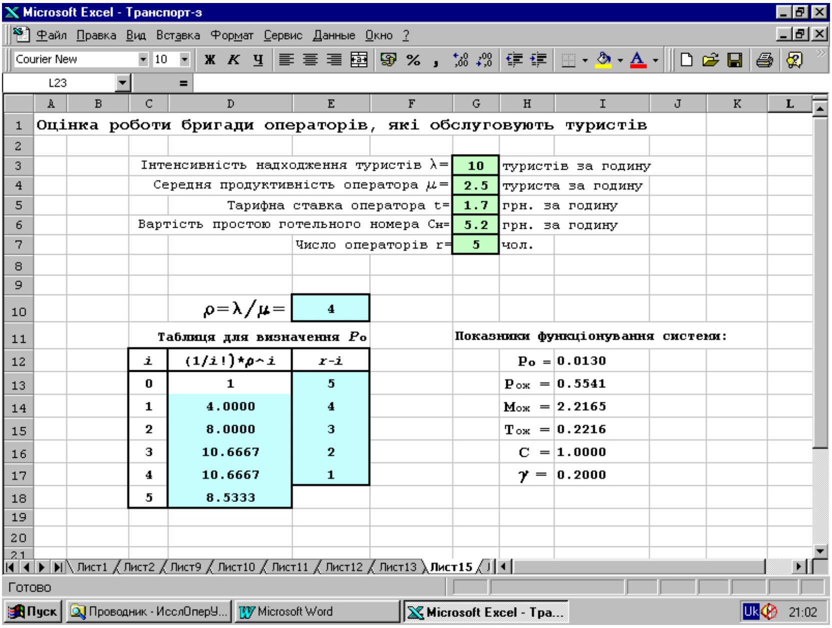


Рис.2.13

В електронній таблиці передбачений такий розподіл осередків для вхідних даних:

осередок G3 – для інтенсивності вхідного потоку вимог $\lambda =$ 10;

осередок G4 – для інтенсивності вихідного потоку вимог μ = 2.5;

осередок G5 – для тарифної ставки оператора $t = 1.7$;

осередок G6 – для вартості простою готельного номера $C_н$ = 5.2;

осередок G7 – для числа каналів обслуговування $r = 5$;

осередки C13:C18 – для значень величини $i = 0,1,\ldots,5$;

осередок D13 – для константи 1;

В електронній таблиці передбачено запис таких формул для одержання розрахункових даних:

формула =G3/G4 в осередку E10 – для розрахунку величини ρ;

формула =D13*$E$10/C14 в осередку D14 – для розрахунку величини $\frac{\rho^i}{i!}$ при $i = 1$;

формула =5-C13 в осередку E13 – для розрахунку величини $r - i$ при $i = 0$;

формула =1/(СУМ(D13:D17)+(D18/(1–$E$10/G7))) в осередку I12 – для розрахунку величини $P_о$;

формула =D18*I12/(1–$E$10/G7) в осередку I13 – для розрахунку величини $Пик$;

формула =(D18*I12*$E$10/G7)/(1–$E$10/G7)^2 в осередку I14 – для розрахунку величини $M_{ож}$;

формула =I14/G3 в осередку I15 – для розрахунку величини $\overline{T}_{ож}$;

формула =СУММПРОИЗВ(D13:D17;E13:E17)*I12 в осередку I16 – для розрахунку величини C;

формула =I16/G7 в осередку I17 – для розрахунку величини γ.

Для завершення формування електронної таблиці потрібно послідовно скопіювати формули:

з осередку D14 в осередки D15:D18 для одержання величин $\frac{\rho^i}{i!}, \quad i = \overline{2,5}$;

з осередку E13 в осередки E14:E17 для одержання величин $r - i, \quad i = \overline{1,4}$.

Наведена на рис.2.13 електронна таблиця може бути успішно використана для будь-яких розімкнутих п’ятиканальних систем масового обслуговування з необмеженим часом чекання. Для цього досить підставити в електронну таблицю відповідні вхідні дані.

Для порівняння на рис.2.14 показана електронна таблиця для проведення розрахунків показників *шестиканальної* системи масового обслуговування з необмеженим часом чекання (див. *приклад 2.3*) .

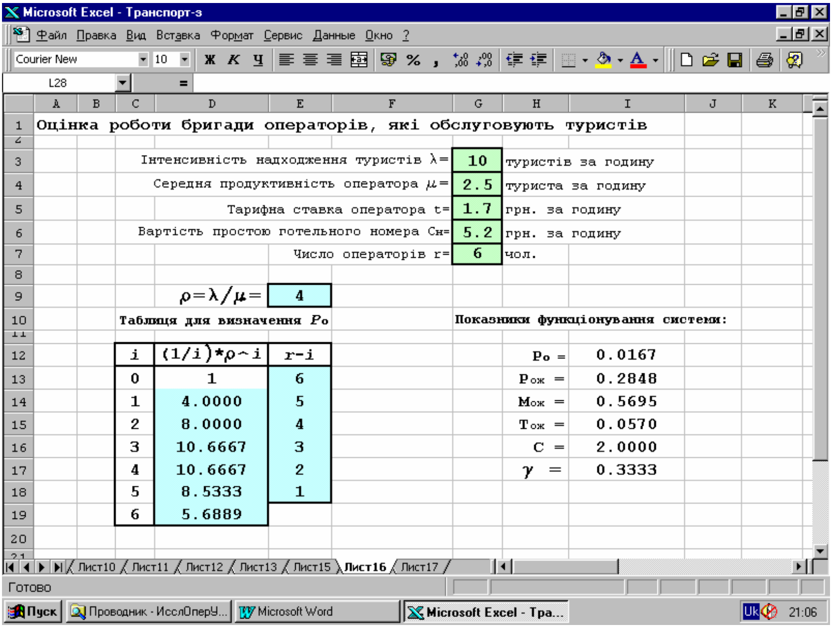


Рис.2.14

В електронній таблиці передбачено такий розподіл осередків для вхідних даних:

осередок G3 – для інтенсивності вхідного потоку вимог $\lambda =$ 10;

осередок G4 – для інтенсивності вихідного потоку вимог $\mu =$ 2.5;

осередок G5 – для тарифної ставки оператора $t = 1.7$;

осередок G6 – для вартості простою готельного номера $C_{\text{н}} =$ 5.2; осередок G7 – для числа каналів обслуговування $r = 6$;

осередки C13:C19 – для значень величини $i = 0,1,\ldots,6$;

осередок D13 – для константи 1;

В електронній таблиці передбачено запис таких формул для одержання розрахункових даних:

формула =G3/G4 в осередку E9 – для розрахунку величини ρ;

формула =D13*$E$9/C14 в осередку D14 – для розрахунку величини $\frac{\rho^i}{i!}$ при i = 1;

формула =6-C13 в осередку E13 – для розрахунку величини $r - i$ при i = 0;

формула =1/(СУМ(D13:D18)+(D19/(1–$E$9/G7))) в осередку I12 – для розрахунку величини $P_о$;

формула =D19*I12/(1–$E$9/G7) в осередку I13 – для розрахунку величини $Пик$;

формула =(D19*I12*$E$9/G7)/(1–$E$9/G7)^2 в осередку I14 – для розрахунку величини $M_{оч}$;

формула =I14/G3 в осередку I15 – для розрахунку величини $\overline{T}_{оч}$;

формула =СУММПРОИЗВ(D13:D18;E13:E18)*I12 в осередку I16 – для розрахунку величини C;

формула =I16/G7 в осередку I17 – для розрахунку величини γ.

Для завершення формування електронної таблиці необхідно послідовно скопіювати формули:

з осередку D14 в осередки 15:D19 для одержання величин $\frac{\rho^i}{i!}, \quad i = \overline{2,6}$;

з осередку E13 в осередки E14:E18 для одержання величин $r - i, \quad i = \overline{1,5}$.

Наведена на рис.2.14 електронна таблиця може бути успішно використана для будь-яких розімкнутих шестиканальних систем масового обслуговування з необмеженим часом очікування. Для цього досить підставити в електронну таблицю відповідні вхідні дані.

2.6.3. Розімкнута система масового обслуговування з обмеженим часом очікування

Для розімкнутих систем масового обслуговування з неперервним потоком вимог і обмеженим часом очікування обслуговування характерні ті ж особливості, що і для систем із необмеженим часом очікування, а саме:

нескінчене число можливих станів i, що зв'язане з числом вимог у системі;

обмежене число r обслуговуючих каналів;

кожний канал спроможний одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

при наявності вільного каналу вимога, що поступає в систему, негайно обслуговується;

вимога, що надійшла в систему в момент, коли всі r каналів обслуговування зайняті, стає в чергу очікування обслуговування;

теоретично черга вимог, що очікують обслуговування, нескінчена.

Крім того, в розімкнутих системах масового обслуговування з неперервним потоком вимог і обмеженим часом очікування обслуговування час очікування в черзі кожної вимоги обмежений випадковою величиною $t_{оч}$, середнє значення якої $\bar{t}_{оч}$.

Величина, зворотна середньому часу очікування, означає середню кількість вимог, що покидають чергу за одиницю часу в зв'язку з появою в черзі однієї вимоги: $\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{ож}}$.

При наявності в черзі j вимог інтенсивність потоку вимог, що покидають чергу , складає jk.

Задача визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вхідними параметрами до вирішення задачі служать:

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (в тих же одиницях виміру, що і потік вимог);

ν – середня кількість вимог, що покидають чергу в одиницю часу в зв'язку з появою в черзі однієї вимоги;

r – число обслуговуючих каналів.

Обчислення основних показників системи виконують за нижченаведеними формулами.

1. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного визначають за формулою (2.41).

2. Імовірності одночасного перебування i вимог у системі P_i, якщо $1 \le i \le r$, обчислюють за формулами (2.42) – (2.45).

3. Імовірність одночасного перебування i вимог у черзі, якщо $r+1 \le i \le \infty$, обчислюють за формулою

$$P_i = \frac{\rho^r}{r!} P_0 \frac{\lambda^{i-r}}{\prod_{j=1}^{i-r} (r\mu + j\nu)} . \tag{2.61}$$

4. Імовірність відсутності вимог у системі P_0, або *імовірність простою* визначають за формулою

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^r}{r!} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-r}}{\prod_{j=1}^{i-r} (r\mu + j\nu)} \right)^{-1} . \tag{2.62}$$

Для одноканальної системи, коли r = 1, вираз (2.62) спрощується:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \rho \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\lambda^{i-1}}{\prod_{j=1}^{i-1} (\mu + j\nu)} \right)^{-1} . \tag{2.63}$$

У практичних задачах суму нескінченного ряду обчислити досить просто, тому що члени ряду швидко убувають із збільшенням номера члена (індексу j).

5. *Імовірність завантаження системи* (імовірність зайнятості обслуговуванням хоча б одного каналу або відносна пропускна здатність) знаходять за формулою

$$P_{заг} = 1 - P_0 . \tag{2.64}$$

6. *Абсолютну пропускну здатність* визначають як добуток

$$A = \lambda \; P_{заг} \; . \qquad (2.65)$$

Приклад **2.4.** У пункті хімчистки є три апарати для чищення, $r = 3$. Інтенсивність потоку відвідувачів $\lambda = 6$ (*чол./год.)*. Інтенсивність обслуговування відвідувачів одним апаратом $\mu = 3$ (*чол./год.)*. Середнє число відвідувачів, які покидають чергу, не дочекавшись обслуговування, $\nu = 1$ (*чол./год.)*. Знайти абсолютну пропускну спроможність пункту хімчистки.

Вирішення.

1. Знаходимо величину ρ за формулою (2.41):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2 \; .$$

2. Визначимо імовірність того, що всі апарати простоюють, за формулою (2.62):

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^r}{r!} \sum_{i=r+1}^{\infty} \frac{\lambda^{i-r}}{\prod\limits_{j=1}^{i-r} (r\mu + j\nu)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^3}{3!} \cdot \left(\frac{6}{3 \cdot 3 + 1} + \frac{6^2}{(3 \cdot 3 + 1)(3 \cdot 3 + 2 \cdot 1)} + \cdots \right) \right)^{-1}$$

$$=$$

$$= \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{10} + \frac{6^2}{10 \cdot 11} + \frac{6^3}{10 \cdot 11 \cdot 12} + \cdots \right) \right)^{-1} \approx$$

$$\approx \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{10} + \left(\frac{6}{10} \right)^2 + \left(\frac{6}{10} \right)^3 + \cdots \right) \right)^{-1} = \left(6\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} \cdot 2 \right)^{-1} = 0{,}12$$

.

Дійсне значення P_0 буде дещо перевищувати знайдене (не більше ніж на 1%).

3. Імовірність завантаження каналів знаходять за формулою (2.64):

$$P_{зав} = 1 - P_0 = 1 - 0{,}12 = 0{,}88 \ .$$

4. Абсолютну пропускну спроможність визначимо за формулою (2.65):

$$A = \lambda \ P_{зав} = 6 \cdot 0{,}88 = 5{,}28 \ .$$

Шукане рішення знайдене.

2.6.4. Розімкнута система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги

Для розімкнутих систем масового обслуговування з безупинним потоком вимог і обмеженою довжиною черги очікування обслуговування характерні наступні особливості:

кінцеве число можливих станів i, що зв'язано з числом вимог у системі, $0 \le i \le r + k$;

обмежене число r обслуговуючих каналів;

кожний канал спроможний одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

при наявності вільного каналу вимога, що поступає, негайно обслуговується;

вимога, що надійшла в систему в момент, коли всі r каналів обслуговування зайняті, стає в чергу очікування обслуговування;

обмежена довжина k черги вимог, що очікують обслуговування, – якщо вимога на обслуговування поступає в момент, коли в черзі знаходиться k вимог, вона безповоротно втрачається, тобто має місце відмова в обслуговуванні;

число вимог, що одночасно знаходяться в системі, може змінюватися від *0* до r+ k;

у більшості практичних задач відношення $\dfrac{\lambda}{\mu \cdot r} < 1$.

Задача визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вхідними параметрами вирішення задачі служать:

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміру, що і потік вимог);

r – число обслуговуючих каналів;

k – допустима довжина черги.

Обчислення основних показників системи виконують за нижченаведеними формулами.

1. *Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного* визначають за формулою (2.41).

2. *Імовірності одночасного перебування* i *вимог* у системі P_i, якщо $1 \le i \le r$, обчислюють за формулами (2.42) – (2.45).

3. *Імовірність одночасного перебування* i *вимог у черзі*, якщо $r+1 \le i \le r+k$, обчислюють за формулою

$$P_i = \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} P_0 \ . \tag{2.66}$$

4. *Імовірність відсутності вимог у системі* P_0, або *імовірність простою,* знаходять за формулою

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=r+1}^{r+k} \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} \right)^{-1} . \tag{2.67}$$

Друга сума в (2.67) являє собою суму спадної геометричної прогресії з числом членів, рівним k, початковим членом $\frac{\rho^{r+1}}{r!r}$ і знаменником $\frac{\rho}{r}$. Тому на практиці використовують більш зручну формулу:

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^k\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)} \right)^{-1} . \qquad (2.68)$$

Для одноканальної системи, коли $r = 1$, вираз (2.62) спрощується:

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{(1 - \rho^k)}{(1 - \rho)}\right)^{-1} . \qquad (2.69)$$

4. *Імовірність відмови* знаходять за формулою

$$P_{від} = P_{r+k} = \frac{\rho^{r+k}}{r^k r!} P_0 = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \frac{\rho^r}{r!} P_0 . \qquad (2.70)$$

Для одноканальної системи вираз (2.70) спрощується:

$$P_{від} = \rho^{r+k} P_0 . \qquad (2.71)$$

5. *Середню довжину черги* визначають за співвідношенням

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r}\right)^i . \qquad (2.72)$$

Для одноканальної системи вираз (2.72) спрощується:

$$M_{\text{оч}} = P_0 \rho^r \sum_{i=1}^{k} i \rho^i . \qquad (2.73)$$

***Приклад* 2.5.** На автозаправної станції встановлено три колонки для видачі бензину, $r = 3$. Біля станції знаходиться площадка на три машини для очікування своєї черги. На станцію прибувають в середньому дві машини за хвилину. Потрібно визначити імовірність відмови і середню довжину черги.

Вирішення.

Вихідні дані задачі: $r = 3,\ k = 3,\ \lambda = 2$ (*хв*$^{-1}$), $\overline{T}_{\text{обс}} = 1$ (*хв*).

1. Спочатку визначимо інтенсивність обслуговування машин:

$$\mu = \frac{1}{\overline{T}_{\text{обс}}} = 1 \ (хв^{1}).$$

2. Далі знаходимо величину ρ за формулою (2.41):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2 \ .$$

3. Визначаємо імовірність того, що всі апарати простоюють за формулою (2.68):

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{r+1}}{r \cdot r!} \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^k\right)}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)} \right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)} \right)^{-1} \approx 0{,}122 \ .$$

4. Знайдемо імовірність відмови за формулою (2.70):

$$P_{від} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k \frac{\rho^r}{r!} P_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{2^3}{3!} \cdot 0{,}122 = 0{,}048 \, .$$

5. Визначаємо середню довжину черги за формулою (2.72):

$$M_{\text{оч}} = \frac{P_0 \rho^r}{r!} \sum_{i=1}^{k} i \left(\frac{\rho}{r}\right)^i = \frac{0{,}122 \cdot 2^3}{3!} \left(\frac{2}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \right) = 0{,}35 \ .$$

Таким чином, усі шукані параметри системи знайдені.

Тема 2.7. Замкнуті системи масового обслуговування

Серед функціонуючих замкнутих систем масового обслуговування особливий інтерес становлять системи:

одноканальні в сталому режимі;

одноканальні в несталому режимі;

багатоканальні в сталому режимі;

багатоканальні в несталому режимі.

Розглянемо кожний тип системи докладніше.

2.7.1. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в сталому режимі

Усі можливі стани одноканальної замкнутої системи масового обслуговування представляються у вигляді розміченого графа станів (рис.2.9).

Для одноканальних замкнутих систем масового обслуговування характерні такі особливості:

наявність одного каналу обслуговування, r=1;

наявність m об'єктів, які можуть потребувати обслуговування;

число можливих станів системи i, зв'язане з числом вимог у системі, скінченне і змінюється в діапазоні від 0 до $m+1$;

канал спроможний одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

вимога, що поступає в систему, негайно обслуговується, якщо канал вільний;

число вимог j, що очікують обслуговування, змінюється в діапазоні від 1 до m;

вимога, що надійшла в систему в момент, коли канал зайнятий обслуговуванням, стає в чергу очікування обслуговування;

об'єкт, вимога на обслуговування якого задоволена, стає потенційним джерелом нової вимоги.

Задача визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівского розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вхідними параметрами вирішення задачі служать:

m – число об'єктів обслуговування;

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміри, що і потік вимог).

У сталому режимі роботи системи масового обслуговування, коли основні показники системи незмінні в розглянутому періоді часу, останні обчислюються за нижченаведеними формулами.

1. *Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного* визначається за формулою (2.41): $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

2. *Імовірності одночасного перебування i вимог* у системі P_i визначаються за такими формулами:

імовірність одночасного перебування в системі 1-ї вимоги

$$P_1 = m\rho P_0 \; ; \tag{2.74}$$

де P_0 – імовірність відсутності вимог у системі;

імовірність одночасного перебування в системі 2-х вимог

$$P_2 = (m-1)\rho P_1 = m(m-1)\rho^2 P_0 \; ; \tag{2.75}$$

імовірність одночасного перебування в системі 3-х вимог

$$P_3 = (m-2)\rho P_2 = m(m-1)(m-2)\rho^3 P_0 \; ; \tag{2.76}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі i вимог

$$P_i = \big(m-(i-1)\big)\rho P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(i-1)\big)\rho^i P_0 = \\ = \rho^i P_0 \prod_{j=0}^{i-1}(m-j) \; ; \tag{2.77}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі m вимог

$$P_m = \rho P_{m-1} = m!\rho^m P_0 \; , \tag{2.78}$$

4. *Імовірність відсутності вимог у системі* P_0, або *імовірність простою*

Як видно зі співвідношень (2.74) – (2.78), кожна наступна імовірність P_i утворюється з попередньої P_{i-1} множенням m-(i-1) на величину ρ. Для визначення P_0 врахуємо, що сума всіх імовірностей

$P_0 + P_1 + P_2 + P_m = 1$, тобто $\sum_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} = 1$. З даної рівності з урахуванням (2.74) – (2.78) знаходимо P_0:

$$P_0 = \left(1 + m\rho + \sum_{i=2}^{m} \rho^i \prod_{j=0}^{i-1} (m - j)\right)^{-1} ; \tag{2.79}$$

5. *Коефіцієнт простою обслуговуючого каналу*

$$\gamma = P_0 . \tag{2.80}$$

6. *Імовірність того, що обслуговуючий канал буде зайнятий,*

$$P_з = 1 - P_0 . \tag{2.81}$$

7. *Математичне очікування числа об'єктів, які знаходяться в системі на обслуговуванні або стоять у черзі,*

$$M_{\text{сис}} = \sum_{i=0}^{m} iP_i . \tag{2.82}$$

8. *Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта через його обслуговування або перебування в черзі*

$$\alpha = \frac{M_{\text{сис}}}{m} . \tag{2.83}$$

9. *Середня довжина черги*, тобто кількість об'єктів, що очікують обслуговування,

$$M_{оч} = \sum_{i=1}^{m} (i - 1)Pi . \tag{2.84}$$

10. *Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта* (пральної машини) *в очікуванні обслуговування*

$$\beta = \frac{M_{оч}}{m} . \tag{2.85}$$

11. *Середній час очікування об'єктом обслуговування*

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{M_{оч}}{m\lambda} . \tag{2.86}$$

Приклад 2.6. Робітник обслуговує групу автоматів, що складається з шести пральних машин. У середньому автомат зупиняється через 12 *хв.*, тобто в годину до системи поступає 5 вимог, або λ = 5 *вим../год.* Час обслуговування однієї пральної машини займає в робітника $t_{\text{обс}}$ = 3 *хв.*=0,05 *ч.*, тобто інтенсивність вихідного потоку $\mu = \dfrac{1}{t_{\text{обс}}}$ = *20 вим./год.* У результаті математико-статистичної обробки даних фотографії робочого часу встановлено, що потік вимог найпростіший, а час обслуговування підпорядковується показовому закону розподілу. Треба визначити основні показники функціонування прального комбінату

Вирішення.

Вхідні дані задачі:

число каналів $r = 1$ (один робітник);

число об'єктів обслуговування $m = 6$ (шість пральних машин);

інтенсивність вхідного потоку вимог $\lambda = 5$ *вим./год.*;

інтенсивність вихідного потоку вимог $\mu = 20$ *вим./год.*

Оскільки число об'єктів, які обслуговуються, дорівнює шести, то система може знаходитися в семи різних станах: 0, 1, 2…,6 (відповідно до можливої кількості вимог у системі).

1. Знайдемо величину ρ за формулою (2.41):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{20} = 0{,}25\,.$$

2. Визначимо імовірність того, що системний канал обслуговування (у нашому випадку – робітник*)* простоює за формулою (2.79): $P_0 = \left(1 + m\rho + \sum\limits_{i=2}^{m} \rho^i \prod\limits_{j=0}^{i-1}(m-j)\right)^{-1}$ = 0,117, що складає 11,7% робочого часу. Всі проміжні результати розрахунку P_0 відображені в табл.2.7

Таблиця 2.7

i	$P_i(P_{i-1},P_0)$	P_i/P_0	P_i	$i\,P_i$	$(i-1)\,P_i$
0	$P_0 = P_0$	1,00000	0,11716	0	
1	$P_1 = mP_0\,\rho$	1,50000	0,17574	0,17574	0
2	$P_2 = (m\text{-}1)P_1\,\rho$	1,.87500	0,21968	0,43936	0,21968
3	$P_3 = (m\text{-}2)P_2\,\rho$	1,87500	0,21968	0,65904	0,43936
4	$P_4 = (m\text{-}2)P_{23}\,\rho$	1,40625	0,16476	0,65904	0,49428
5	$P_5 = (m\text{-}2)P_4\,\rho$	0,70313	0,08238	0,41190	0,.32952
6	$P_6 = (m\text{-}2)P_5\,\rho$	0,17578	0,02059	0,12357	0,10297
		8,53516	1,00000	2,46865	1,58581

3. Визначимо коефіцієнт простою обслуговуючого каналу (робітника) відповідно до формули (2.80): $\gamma = P_0$=0,117.

4. Знайдемо імовірність того, що обслуговуючий канал опиниться зайнятим за формулою (2.81): $P_з$=1-P0 = 1–0,117 =0,883, або у 88,3% випадків обслуговування відбудеться не відразу, а після деякого часу очікування.

5. Математичне очікування числа об'єктів, що знаходяться в системі на обслуговуванні або перебувають у черзі, визначимо за формулою (2.82): $M_{сис} = \sum_{i=0}^{m} iP_i = 2{,}469\,\text{маш}.$

6. Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта через його обслуговування або очікування черги визначимо за формулою (2.83): $\alpha = \dfrac{M_{сис}}{m} = 0{,}4114$, або 41,14% робочого часу кожна пральна машина простоює через його обслуговування або очікування черги.

7. Визначимо математичне очікування числа об'єктів (пральних машин), які простоюють, або середню довжину черги, за формулою (2.84):

$$M_{ож} = \sum_{i=1}^{m}(i-1)Pi = 1{,}5858 \textit{ маш.}$$

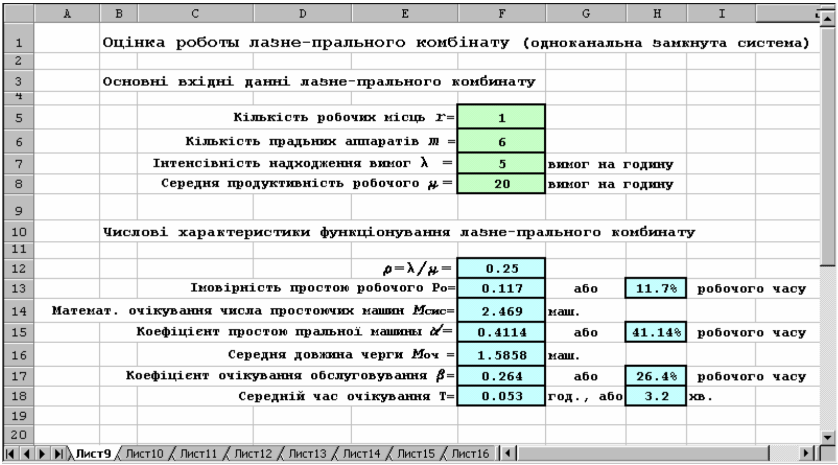
8. Обчислимо середнє значення коефіцієнта простою однієї пральної машини в очікуванні обслуговування за формулою (2.85): $\beta = \frac{M_{оч}}{m} = \frac{1{,}5858}{6} = 0{,}264$, або 26,4% робочого часу кожна пральна машина простоює в очікуванні, коли звільниться робітник.

9. Середній час чекання знаходимо за формулою (2.86): $\overline{T}_{оч} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{0.264}{5} \cdot 60 = 3.2$ хв.

Аналіз результатів проведеного розрахунку свідчить про значний простій пральних машин в очікуванні моменту, коли робітник звільниться від обслуговування інших машин. Але рішення про зменшення кількості пральних машин, які обслуговуються одним робітником, або про збільшення числа робітників можна приймати тільки після проведення додаткових перевірочних економічних розрахунків. При цьому необхідно зіставити збитки від простоїв устаткування з додатковими витратами, зв'язаними зі збільшенням числа робітників.

2.7.2. Комп'ютерний розрахунок показників одноканальної замкнутої системи масового обслуговування

Для комп'ютерного розрахунку показників замкнутої системи масового обслуговування, що функціонує в сталому режимі, рекомендується використовувати інформаційну систему *Microsoft Excel.* Розглянемо використання інформаційної системи *Microsoft Excel* для розрахунку показників системи масового обслуговування в рамках прикладу 2.6. На рис.2.15 і рис.2.16 показані фраґменти електронної таблиці для проведення розрахунку показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування.



Оцінка роботы лазне-прального комбінату (одноканальна замкнута система)

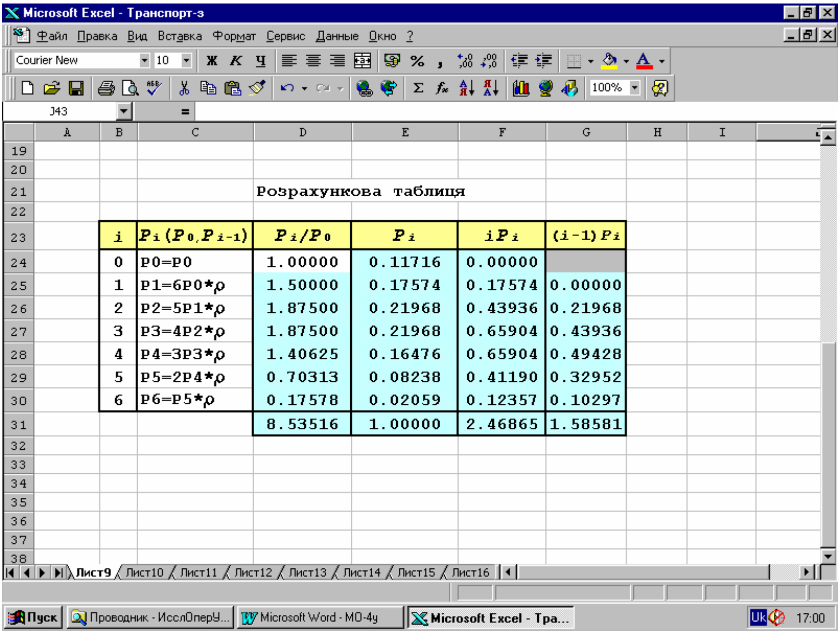
Основні вхідні данні лазне-прального комбинату

Кількість робочих місць r=	1	
Кількість прадьних аппаратів m =	6	
Інтенсівність надходження вимог λ =	5	вимог на годину
Середня продуктивність робочого μ =	20	вимог на годину

Числові характеристики функціонування лазне-прального комбінату

ρ=λ/μ=	0.25			
Імовірність простою робочого Po=	0.117	або	11.7%	робочого часу
Математ. очікування числа простоючих машин Мсис=	2.469	маш.		
Коефіцієнт простою пральної машины α=	0.4114	або	41.14%	робочого часу
Середня довжина черги Моч =	1.5858	маш.		
Коефіцієнт очікування обслуговування β=	0.264	або	26.4%	робочого часу
Середній час очікування T=	0.053	год., або	3.2	хв.

Рис.2.15



Розрахункова таблиця

i	Pi(P0,Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi	(i-1)Pi
0	P0=P0	1.00000	0.11716	0.00000	
1	P1=6P0*ρ	1.50000	0.17574	0.17574	0.00000
2	P2=5P1*ρ	1.87500	0.21968	0.43936	0.21968
3	P3=4P2*ρ	1.87500	0.21968	0.65904	0.43936
4	P4=3P3*ρ	1.40625	0.16476	0.65904	0.49428
5	P5=2P4*ρ	0.70313	0.08238	0.41190	0.32952
6	P6=P5*ρ	0.17578	0.02059	0.12357	0.10297
		8.53516	1.00000	2.46865	1.58581

Рис.2.16

В електронній таблиці передбачено такий розподіл осередків для вхідних даних:

осередок F5 – для числа каналів обслуговування, $r = 1$;

осередок F6 – для числа об'єктів , що обслуговуються, $\mathrm{m} = 6$;

осередок F7 – для інтенсивності вхідного потоку вимог, $\lambda = 5$;

осередок F8 – для інтенсивності вихідного потоку вимог, $\mu = 20$;

осередки B24:B30 – для значень величини $i = 0,1,\ldots,6$;

осередок D24 – для константи 1.

В електронній таблиці передбачено запис наступних формул для одержання розрахункових числових даних:

формула =F7/F8 в осередку F12 – для розрахунку величини ρ ;

формула =E24 в осередку F13 – для посилання на осередок E24 із розрахунковою імовірністю простою робітника P_0;

формула =F31 в осередку F14 – для посилання на осередок F31 із розрахунковим математичним очікуванням числа пральних машин, які простоюють, $\mathrm{M}_{\text{сис}}$;

формула =F14/F6 в осередку F15 – для розрахунку коефіцієнта простою пральної машини α ;

формула =G31 в осередку F16 – для посилання на осередок G31 із розрахунковим математичним очікуванням середньої довжини черги $M_{\text{оч}}$;

формула =F16/F6 в осередку F17 – для розрахунку коефіцієнта простою в очікуванні обслуговування β ;

формула =F17/(F6–1) в осередку F18 – для розрахунку середнього часу очікування обслуговування $\overline{T}_{\text{оч}}$ (в *годинах*).;

формула =F18*60 в осередку H18 – для розрахунку середнього часу очікування обслуговування $\overline{T}_{\text{ож}}$ (в *хвилинах*).;

формула =(6-B24)*D24*$F$12 в осередку D25 – для розрахунку величини $(6-i)P_i\rho$ при $i = 0$;

формула =СУМ(D24:D30) в осередку D31;

формула =1/D31 в осередку E24 – для розрахунку імовірності P_0;

формула =$E$24*D25 в осередку E25 – для розрахунку імовірності P_i при $i = 1$;

формула =СУМ(E24:E30) в осередку E31;

формула =B24*E24 в осередку F24 – для розрахунку величини $i{*}P_\text{i}$ при $i = 0$;

формула =СУМ(F24:F30) в осередку F31;

формула =B24*E25 в осередку G25 – для розрахунку величини $(i\!-\!1){*}\,P_\text{i}$ при $i = 1$;

формула =СУМ(G25:G30) в осередку G31.

В електронній таблиці передбачено запис таких формул для одержання процентних числових даних:

формула =F13 в осередку H13 – для посилання на осередок F13 з метою одержання часу простою робітника у відсотках від загального робочого часу;

формула =F15 в осередку H15 – для посилання на осередок F15 із метою одержання часу простою однієї пральної машини у відсотках від загального робочого часу;

формула =F17 в осередку H17 – для посилання на осередок F17 із метою одержання часу простою однієї пральної машини через очікування в черзі у відсотках від загального робочого часу;

Для завершення формування електронної таблиці необхідно послідовно скопіювати формули:

з осередку D25 в осередки D26:D30 для одержання величини $(6-i)P_i\rho$ при i =1,2,3,4,5;

з осередку E25 в осередки E26:E30 для розрахунку імовірності P_i при i =2,3,4,5,6;

з осередку F24 в осередки F25:F30 для розрахунку імовірності $i{*}P_\text{i}$ при i =1,2,3,4,5,6;

з осередку G25 в осередки G26:G30 для розрахунку імовірності $(\text{i}\!-\!1){*}P_\text{i}$ при i =2,3,4,5,6;

Наведену на рис.2.15 і рис.2.16 електронну таблицю можна успішно використати для будь-яких замкнутих одноканальних систем масового обслуговування із шістьма об'єктами, які функціонують у сталому режимі. Для цього досить підставити в електронну таблицю відповідні вихідні дані.

2.7.3. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи MathCAD 2000.

Тепер розглянемо несталий режим роботи одноканальної замкнутої системи масового обслуговування, коли основні імовірнісні характеристики її залежать від інтервалу часу, на якому вони розглядаються. У цьому випадку інтенсивності вхідних і вихідних потоків для кожного стану системи, поданої у вигляді розміченого графа станів на рис.2.9, будуть збалансовані, як це показано системою диференціальних рівнянь (2.39).

Для одноканальної замкнутої системи масового обслуговування система диференціальних рівнянь (2.39) трансформується в систему

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t);\\
&\frac{dP_1(t)}{dt} = \mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t);\\
&\frac{dP_2(t)}{dt} = \mu P_3(t) - (\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t);\\
&\ldots\\
&\frac{dP_i(t)}{dt} = \mu P_{i+1}(t) - (\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t), \quad i = \overline{1,m};\\
&\ldots\\
&\frac{dP_m(t)}{dt} = -\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t).
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Вирішення системи диференціальних рівнянь з метою визначення імовірностей $P_i(t)$ вимагає великої обчислювальної роботи. Для цього доцільно використовувати інформаційну систему *MathCAD 2000*. Розглянемо рекомендовану технологію докладніше на *прикладі 2.5*, припустивши, що основні імовірнісні характеристики лазнепрального комбінату залежать від часу, наприклад, протягом 0,95 *год*.

Послідовність рішення

Насамперед необхідно побудувати систему диференціальних рівнянь для конкретних умов функціонування лазне-прального комбінату, а саме:

число каналів r=1 (один робітник); число об'єктів обслуговування m=6 (шість пральних машин);

інтенсивність вхідного потоку вимог λ = 5 вимог*./год.*;

інтенсивність вихідного потоку вимог μ = 20 *вимог./год.*

Для зазначених умов система (2.87) набуде вигляду:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t);\\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= \mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t);\\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= \mu P_3(t) - (\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t);\\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= \mu P_4(t) - (\mu + (m-3)\lambda)P_3(t) + (m-2)\lambda P_2(t);\\
\frac{dP_4(t)}{dt} &= \mu P_5(t) - (\mu + (m-4)\lambda)P_4(t) + (m-3)\lambda P_3(t);\\
\frac{dP_5(t)}{dt} &= \mu P_6(t) - (\mu + (m-5)\lambda)P_5(t) + (m-4)\lambda P_4(t);\\
\frac{dP_6(t)}{dt} &= -\mu P_6(t) + \lambda P_5(t).
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

У системі (2.88) величини $\lambda,\ \mu, m$ спеціально не заміняються числовими значеннями з метою більш швидкої її адаптації до умов нових задач, якщо такі матимуть місце.

Етапи процесу вирішення задачі відображені на рис.2.17. Усі необхідні дії і пояснення до них наводяться нижче.

Визначення параметрів функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування в неусталому режимі

1.Вхідні дані: $\lambda := 5$ $\mu := 20$ $m := 6$

2. Функція вектора відхилень D(t,P) та початкові значення вектора відхилень P

$$D(t,P) := \begin{bmatrix} \mu \cdot P_1 - m \cdot \lambda \cdot P_0 \\ \mu \cdot P_2 - [\mu + (m-1)\cdot\lambda]\cdot P_1 + m\cdot\lambda\cdot P_0 \\ \mu \cdot P_3 - [\mu + (m-2)\cdot\lambda]\cdot P_2 + (m-1)\cdot\lambda\cdot P_1 \\ \mu \cdot P_4 - [\mu + (m-3)\cdot\lambda]\cdot P_3 + (m-2)\cdot\lambda\cdot P_2 \\ \mu \cdot P_5 - [\mu + (m-4)\cdot\lambda]\cdot P_4 + (m-3)\cdot\lambda\cdot P_3 \\ \mu \cdot P_6 - [\mu + (m-5)\cdot\lambda]\cdot P_5 + (m-4)\cdot\lambda\cdot P_4 \\ -\mu\cdot P_6 + \lambda\cdot P_5 \end{bmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Додаткові параметри: $t0 := 0$ $t1 := 0.95$ $N := 100$

4. Пошук рішення: $S := \mathrm{rkfixed}(P, t0, t1, N, D)$

$t := S^{\langle 0 \rangle}$ $P_0 := S^{\langle 1 \rangle}$ $P_1 := S^{\langle 2 \rangle}$ $P_2 := S^{\langle 3 \rangle}$ $P_3 := S^{\langle 4 \rangle}$ $P_4 := S^{\langle 5 \rangle}$ $P_5 := S^{\langle 6 \rangle}$ $P_6 := S^{\langle 7 \rangle}$

5. Виведення результатів вирішення

S =

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	$9.500\cdot10^{-3}$	0.772	0.203	0.024	$1.380\cdot10^{-3}$	$7.636\cdot10^{-5}$	0.000	0.000
2	0.019	0.623	0.299	0.069	$8.588\cdot10^{-3}$	$6.435\cdot10^{-4}$	$2.508\cdot10^{-5}$	$3.693\cdot10^{-7}$
3	0.029	0.522	0.340	0.114	0.021	$2.345\cdot10^{-3}$	$1.399\cdot10^{-4}$	$3.458\cdot10^{-6}$
4	0.038	0.451	0.354	0.151	0.038	$5.489\cdot10^{-3}$	$4.380\cdot10^{-4}$	$1.474\cdot10^{-5}$
5	0.048	0.398	0.355	0.181	0.055	0.010	$1.006\cdot10^{-3}$	$4.272\cdot10^{-5}$
6	0.057	0.357	0.348	0.204	0.073	0.016	$1.901\cdot10^{-3}$	$9.757\cdot10^{-5}$
7	0.067	0.325	0.339	0.220	0.090	0.022	$3.148\cdot10^{-3}$	$1.895\cdot10^{-4}$

Рис.2.17

Уведемо пояснювальний текст у робочий аркуш. Для цього встановимо курсор (візир – червоний хрестик) у місце введення. Потім виберемо (клацанням миші) пункт ***Insert*** (Вставка) з головного меню *MathCAD*. У падаючому меню, що з’явилося, виберемо пункт ***Text Region*** (Текстова область) або в місці розташування курсору натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+"*** (подвійна лапка). В обох випадках з'явиться шаблон, що вказує на початок уведення тексту. В міру введення пояснювального тексту «Визначення параметрів функціонування одноканальної системи масового обслуговування в несталому режимі» текстова область буде автоматично збільшуватися. По закінченні цієї операції виведемо курсор (маркер уведення – червона вертикальна риска) за рамку області.

Повторимо описану процедуру для введення пояснювального тексту до першого етапу «1. Вхідні дані: ».

На першому етапі задаємо значення для $\lambda,\ \mu, m$. Для цього натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+:*** (двокрапка) для одержання шаблону операції присвоювання зі знаком присвоювання «**:=**» і двома мітками. На місце лівої мітки помістимо позначення даного: λ, на місце правої – її значення: 5. Аналогічно задамо μ і m.

На другому етапі введемо пояснювальний текст «2. Функція вектора відхилень D(t,**P***)* і початкове значення вектора відхилень **P:** », а потім сформуємо функцію D(t,**P***),* що визначає вектор відхилень **P** шуканих величин у будь-якій точці і задамо початкове значення вектора. Для цього знову натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+:*** для одержання шаблону операції присвоювання. На місце лівої мітки шаблону помістимо ім'я функції вектора відхилень з аргументами: D(t,**P***)***,** а на місце правої – шаблон вектора-стовпця шляхом виклику діалогового вікна командою головного меню ***Insert/Matrix*** і вказівки у вікні параметрів вектора-стовпця: числа рядків – 7, числа стовпців – 1. Далі в мітку шаблону введемо праві частини рівнянь системи диференціальних рівнянь (2.88) так, як показано на рис.2.17. Потім натиснемо комбінацію клавіш ***Shift+:***. У праву мітку шаблону, що з'явиться на екрані, введемо позначення перемінної P, а в ліву – вектор-стовпець із сімома елементами і привласнимо елементам вектора початкові значення: 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0.

На третьому етапі введемо пояснювальний текст «3. Додаткові параметри: » і визначимо самі параметри: t0:=0, t1:=0.95 і N:=100. Вказані параметри відповідно визначають початковий і кінцевий час інтегрування системи (2.88) і число кроків інтегрування.

На четвертому етапі введемо пояснювальний текст «4. Пошук рішення: :» і знайдемо рішення самої системи диференціальних рівнянь (2.88) за допомогою вбудованої функції ***rkfixed***, що реалізує метод Рунге-Кутта з фіксованим кроком. Для виклику цієї функції необхідно виконати команду головного меню ***Insert/Function.*** Після появи діалогового вікна ***Insert Function*** (Вставте функцію) у списку ***Function Category*** (Категорії функцій) треба відшукати категорію Differential Equation Solving (Вирішення диференціального рівняння) і клацнути по ній лівою кнопкою миші. У правому полі ***Function Name*** (Ім'я функції) з'явиться ім'я функції ***rkfixed***. У нижній частині діалогового вікна буде дано правильне написання обраної функції з усіма її аргументами. Потім треба клацнути по кнопці ***ОК***. У нашому випадку в якості параметрів необхідно набрати послідовність **P,t0,t1,N,D**. Усі члени цієї послідовності вже нами визначені.

Результати вирішення системи (2.88) за допомогою функції ***rkfixed*** треба привласнити деякій змінній **S**, що *MathCAD 2000* сприймає як прямокутну матрицю розмірності $N \times (2+m)$, де m – кількість об'єктів обслуговування. На екрані виклик вбудованої функції повинен виглядати в такий спосіб:

.S:= *rkfixed*(P,t0,t1,N,D)

Далі послідовно присвоїмо стовпці матриці змінній інтегрування t і шуканим величинам P_i:

$.\mathbf{t}{:=}\mathbf{S}^{<0>}$; $.\mathbf{P}_0{:=}\mathbf{S}^{<1>}$; $.\mathbf{P}_1{:=}\mathbf{S}^{<2>}$; $.\mathbf{P}_2{:=}\mathbf{S}^{<3>}$; $.\mathbf{P}_3{:=}\mathbf{S}^{<4>}$; $.\mathbf{P}_4{:=}\mathbf{S}^{<5>}$; $.\mathbf{P}_5{:=}\mathbf{S}^{<6>}$; $.\mathbf{P}_6{:=}\mathbf{S}^{<7>}$.

На черговому кроці введемо пояснювальний текст «5. Виведення результатів вирішення» і зазначимо змінну **S** із знаком присвоювання **:=**. Вирішення системи автоматично буде виведено на екран у формі таблиці, фрагмент якої показаний на рис.2.17.

На останньому кроці введемо пояснювальний текст «6. Графічне представлення рішення системи диференціальних рівнянь: » і вставимо в робочий аркуш графіки імовірностей знаходження системи масового обслуговування в різних станах як функції часу. На рис.2.18 наведено графічне вирішення системи диференціальних рівнянь.

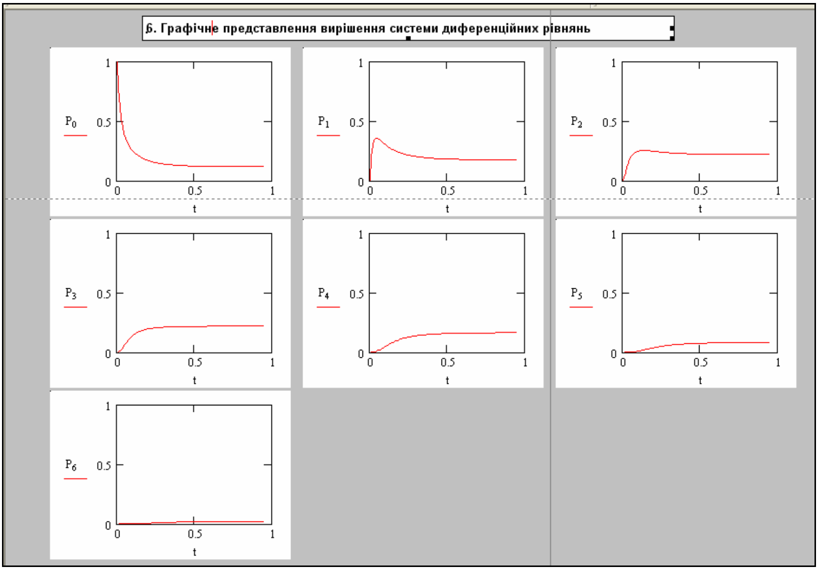


Рис.2.18

Аналізуючи результати вирішення, подані за допомогою матриці-таблиці **S**, можна констатувати, що приблизно через 0,902 *год*. (54 *хв*.) система переходить у сталий режим роботи. При цьому імовірності станів сталого режиму роботи системи набувають значення: P_0=0,117, P_1=0,176, P_2=0,220, P_3=0,220, P_4=0,164, P_5=0,082, P_6=0,020. Отримані результати збігаються з результатами розрахунку цих же імовірностей у сталому режимі (див. табл.2.7).

2.7.4. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування у сталому режимі

Усі можливі стани багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування представляються у вигляді розміченого графа станів (рис.2.10).

Для багатоканальних замкнутих систем масового обслуговування характерні такі особливості:

наявність скінченного числа каналів обслуговування, $r > 1$;

наявність m об'єктів, які можуть потребувати обслуговування;

число можливих станів системи i, пов'язане з числом вимог у системі, звичайне і змінюється в діапазоні від 0 до $m + r$;

канал, спроможний одночасно обслуговувати тільки одну вимогу;

вимога, що поступає в систему, негайно обслуговується, якщо вільний хоча б один канал обслуговування;

число вимог j, що очікують обслуговування, змінюється в діапазоні від 1 до m;

вимога, що надійшла в систему в момент, коли всі канали зайняті обслуговуванням, стає в чергу очікування обслуговування;

об'єкт, в якого вимога на обслуговування задоволена, стає потенційним джерелом нової вимоги.

Задача визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вхідними параметрами вирішення задачі служать:

r – число каналів обслуговування;

m – число об'єктів обслуговування;

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміру, що і потік вимог).

У сталому режимі роботи системи масового обслуговування, коли основні показники системи незмінні за період часу розгляду, останні (показники) обчислюються за нижченаведеними формулами. При цьому вважатимемо, що кількість об'єктів обслуговування перевищує кількість каналів, тобто $m > r$.

1. Коефіцієнт завантаження системи визначають за формулою (2.41): $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

2. Імовірності одночасного перебування i вимог у системі P_i визначають за такими формулами:

імовірність одночасного перебування в системі 1-ї вимоги

$$P_1 = m\rho P_0 \;; \tag{2.89}$$

де P_0 – імовірність відсутності вимог у системі;

імовірність одночасного перебування в системі 2-х вимог

$$P_2 = (m-1)\frac{\rho}{2}P_1 = m(m-1)\frac{\rho^2}{2!}P_0 \;; \tag{2.90}$$

імовірність одночасного перебування в системі 3-х вимог

$$P_3 = (m-2)\frac{\rho}{3}P_2 = m(m-1)(m-2)\frac{\rho^3}{3!}P_0 \;; \tag{2.91}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі i вимог

$$P_i = \big(m-(i-1)\big)\frac{\rho}{i}P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(i-1)\big)\frac{\rho^i}{i!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^i}{i!}P_0\prod_{j=0}^{i-1}(m-j), \quad 1 \le i \le r \;; \tag{2.92}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі r вимог

$$P_r = \big(m-(r-1)\big)\frac{\rho}{r}P_{r-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-(r-1)\big)\frac{\rho^r}{r!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^r}{r!}P_0\prod_{j=0}^{r-1}(m-j), \quad 1 \le i \le r \;; \tag{2.93}$$

імовірність одночасного перебування в системі $(r+1)$-а вимог

$$P_r = \big(m-r\big)\frac{\rho}{r}P_r = m(m-1)(m-2)\cdots\big(m-r\big)\frac{\rho^r}{r \cdot r!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^r}{r \cdot r!}P_0\prod_{j=0}^{r}(m-j) \;; \tag{2.94}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі i вимог

$$P_i = \left(m-(i-1)\right)\frac{\rho}{r}P_{i-1} = m(m-1)(m-2)\cdots\left(m-(i-1)\right)\frac{\rho^i}{r^{i-r}r!}P_0 =$$

$$= \frac{\rho^i}{r^{i-r}r!}P_0\prod_{j=0}^{i-1}(m-j), \quad (r+1)\le i \le m \; ; \tag{2.95}$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі m вимог

$$P_m = \frac{\rho}{r}P_{m-1} = \frac{m!}{r^{m-r}\cdot r!}\rho^m P_0 \;, \tag{2.96}$$

3. Імовірність відсутності вимог у системі P_0. Зі співвідношень (2.89) – (2.96) з урахуванням рівності $\sum\limits_{i=0}^{m} \mathrm{P_i} = 1$ випливає

$$P_0 = \left(1+\sum_{i=1}^{m}\frac{\rho^i}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)+\sum_{i=r+1}^{m}\frac{\rho^i}{r^{i-r}r!}\prod_{j=0}^{i-1}(m-j)\right)^{-1} \; ; \tag{2.97}$$

4. Математичне очікування числа вільних каналів обслуговування

$$M_{\text{ск}} = \sum_{i=1}^{r}(r-i)P_i \;. \tag{2.98}$$

6. *Коефіцієнт простою обслуговуючого каналу*

$$\gamma = \frac{M_{\text{ск}}}{\mathrm{r}} \;. \tag{2.99}$$

6. *Математичне очікування числа об'єктів, які знаходяться в системі на обслуговуванні або стоять у черзі,*

$$M_{\text{сис}} = \sum_{i=0}^{m} iP_i \;. \tag{2.100}$$

7. Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта через його обслуговування або чекання черги

$$\alpha = \frac{M_{\text{сис}}}{m} \ . \tag{2.101}$$

8. Середня довжина черги, тобто кількість об'єктів, які очікують обслуговування,

$$M_{\text{оч}} = \sum_{i=r}^{m} (i-r)Pi \ . \tag{2.102}$$

9. Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта в очікуванні обслуговування

$$\beta = \frac{M_{\text{оч}}}{m} \ . \tag{2.103}$$

10. Середній час очікування об'єктом обслуговування

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{M_{\text{оч}}}{m\lambda} \ . \tag{2.104}$$

Приклад 2.7. Два робітника обслуговують групу автоматів, що складається з 12-ти пральних машин. У середньому автомат зупиняється через 12 *хв.*, тобто в годину поступає 5 вимог, або λ = 5 *вим./год.* Час обслуговування однієї пральної машини займає в робітника $t_{\text{обс}}$ = 3*хв.*= = 0,05 *ч.*, тобто інтенсивність вихідного потоку $\mu = \frac{1}{t_{\text{обс}}}$= *20 вим./год.* У результаті математико-статистичної обробки даних фотографії робочого часу встановлено, що потік вимог є найпростішим, а час обслуговування підпорядковується показовому закону розподілу. Треба визначити основні показники функціонування лазне-прального комбінату.

Вирішення.

Вхідні дані задачі:

число каналів $r = 2$ (два робітники);

число об'єктів обслуговування $m = 12$ (дванадцять пральних машин);

інтенсивність вхідного потоку вимог $\lambda = 5$ *вим./год.*;

інтенсивність вихідного потоку вимог $\mu = 20$ *вим./год.*

Оскільки загальне число вимог не може перевершити число пральних машин, то система може знаходитися в 12-ти різних станах: 0, 1, 2,…,12 (відповідно до можливої кількості вимог у системі).

5. Знайдемо величину ρ за формулою (2.41):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{20} = 0{,}25 \ .$$

6. Визначимо імовірність відсутності вимог за формулою (2.97):

$$P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\rho^i}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (m-j) + \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\rho^i}{r^{i-r} r!} \prod_{j=0}^{i-1} (m-j)\right)^{-1} = 0{,}02638,$$

що складає 2,6% робочого часу. Всі проміжні результати розрахунку P_0 відбиті в табл.2.8.

Таблиця 2.8

i	$P_i P_0, P_{i-1}$)	P_i/P_0	P_i	iP_i	$(i-2)P_i$	$(r-i)P_i$
0	$P_0=P_0$	1,00000	0,02638	0,00000		0,052763
1	$P_1=12P_0*r$	3,00000	0,07914	0,07914		0,079144
2	$P_2=11P_1*r$	4,12500	0,10882	0,21765	0,00000	
3	$P_3=10P_2*r$	5,15625	0,13603	0,40809	0,13603	
4	$P_4=9P_3*r$	5,80078	0,15303	0,61213	0,30606	
5	$P_5=8P_4*r$	5,80078	0,15303	0,76516	0,45910	
6	$P_6=7P_5*r$	5,07568	0,13390	0,80342	0,53561	
7	$P_7=6P_6*r$	3,80676	0,10043	0,70299	0,50214	
8	$P_8=5P_7*r$	2,37923	0,06277	0,50214	0,37660	
9	$P_9=4P_8*r$	1,18961	0,03138	0,28245	0,21968	
10	$P_{10}=3P_9*r$	0,44611	0,01177	0,11769	0,09415	
11	$P_{11}=2P_{10}*r$	0,11153	0,00294	0,03236	0,02648	
12	$P_{12}=P_{11}*r$	0,01394	0,00037	0,00441	0,00368	
		37,90567	1,00000	4,2763	2,65953	0,131906

3. Визначимо математичне очікування числа вільних робітників

(каналів) з обслуговування пральних машин за формулою (2.98):

$$M_{\text{ск}} = \sum_{i=1}^{r} (r-i)P_i = 0{,}1319 \text{ чол.}$$

4. Визначимо простої робітника за формулою (2.99):

$$\gamma = \frac{M_{\text{ск}}}{\text{r}} = 0{,}066.$$

Отже, робітник у середньому простоюватиме 6,6% свого робочого часу.

5. Математичне очікування числа об'єктів, які знаходяться в системі на обслуговуванні або стоять у черзі, визначимо за формулою (2.100):

$$M_{\text{сис}} = \sum_{i=1}^{m} iP_i = 4{,}528 \text{ маш.}$$

6. Середнє значення коефіцієнта простою одного об'єкта через його обслуговування або чекання черги знайдемо за формулою (2.101):

$$\alpha = \frac{M_{\text{сис}}}{m} = 0{,}377,$$

або 37,7% робочого часу кожна пральна машина простоює через її обслуговування або очікування черги.

7. Визначимо математичне очікування числа об'єктів (пральних машин), які простоюють, або середню довжину черги за формулою (2.102):

$$M_{оч} = \sum_{i=2}^{m} (i-1)Pi = 2{,}66 \text{ маш.}$$

8. Обчислимо середнє значення коефіцієнта простою однієї пральної машини в чеканні обслуговування за формулою (2.103):

$$\beta = \frac{M_{оч}}{m} = \frac{2{,}66}{12} = 0{,}2216,$$

або 22,17% робочого часу кожна пральна машина простоює в очікуванні, коли звільниться робітник.

9. Середній час чекання обслуговування знайдемо за формулою (2.104):

$$\overline{T}_{оч} = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{0.2216}{5} = 0{,}018\,\textit{год.},$$

що складає 1,11 *хв*.

Аналіз результатів проведеного розрахунку свідчить про значне поліпшення показників функціонування лазне-прального комбінату. Однак, як відзначалося раніше, рішення про зміну кількості пральних машин або робітників можна приймати тільки після проведення додаткових перевірочних економічних розрахунків

2.7.5. Комп'ютерне обчислення показників багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування

Для комп'ютерного розрахунку показників багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування, що функціонує в сталому режимі, рекомендується використовувати інформаційну систему *Microsoft Excel.*

Розглянемо використання інформаційної системи *Microsoft Excel* для розрахунку показників системи масового обслуговування, описаної в *прикладі 2.6.* На рис.2.19 і 2.20 показані фрагменти електронної таблиці для проведення розрахунку показників функціонування двоканальної замкнутої системи з цього прикладу.

В електронній таблиці передбачено наступний розподіл осередків для вхідних даних:

осередок G4 – для числа каналів обслуговування $r = 2$;

осередок G5 – для числа об'єктів, що обслуговуються, $m = 12$;

осередок G6 – для інтенсивності вхідного потоку вимог $\lambda = 5$;

осередок G7 – для інтенсивності вихідного потоку вимог $\mu = 20$;

осередки A22:B34 – для значень величини $i = 0,1,\ldots,12$;

осередок C22 – для константи 1.

	A	B–F	G	H	I	J
1		Оцінка роботы лазне-прального комбінату (багатоканальна замкнута система)				
2						
3		Основні вхідні данні лазне-прального комбинату				
4		Кількість робочих місць r=	2			
5		Кількість пральних аппаратів m =	12			
6		Інтенсивність надходження вимог λ =	5	вимог на годину		
7		Середня продуктивність робочого μ=	20	вимог на годину		
8						
9		Основні розрахункові показники функціонування лазне-прального комбинату				
10		$\rho=\lambda/\mu$=	0.25			
11		Імовірність одночасного простою робочих Po=	0.02638	або	2.6%	
12		Математ. очікування числа простоючих машин Мсис=	4.528	маш.		
13		Коефіцієнт простою пральної машины α=	0.377	або	37.7%	
14		Середня довжина черги Моч =	2.66	маш.		
15		Коефіцієнт очікування обслуговування β=	0.2216	або	22.2%	
16		Середній час очікування T=	0.018	год., а	1.11	хвилин
17		Математичне очікування числа вільних рабочих Мск =	0.1319	чол.		
18		Коефіцієнт простою робочих γ=	0.066	або	6.6%	
19						

Лист9 / Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15 / Лист16

Рис.2.19

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
20				Розрахункова таблиця					
21	i	Pi (P0, Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi	i-2	(i-2)Pi	r-i	(r-i)Pi
22	0	P0=P0	1.00000	0.02638	0.00000			2	0.0528
23	1	P1=12P0*ρ	3.00000	0.07914	0.07914			1	0.0791
24	2	P2=11P1*ρ	4.12500	0.10882	0.21765	0	0.00000		
25	3	P3=10P2*ρ	5.15625	0.13603	0.40809	1	0.13603		
26	4	P4=9P3*ρ	5.80078	0.15303	0.61213	2	0.30606		
27	5	P5=8P4*ρ	5.80078	0.15303	0.76516	3	0.45910		
28	6	P6=7P5*ρ	5.07568	0.13390	0.80342	4	0.53561		
29	7	P7=6P6*ρ	3.80676	0.10043	0.70299	5	0.50214		
30	8	P8=5P7*ρ	2.37923	0.06277	0.50214	6	0.37660		
31	9	P9=4P8*ρ	1.18961	0.03138	0.28245	7	0.21968		
32	10	P10=3P9*ρ	0.44611	0.01177	0.11769	8	0.09415		
33	11	P11=2P10*ρ	0.11153	0.00294	0.03236	9	0.02648		
34	12	P12=P11*ρ	0.01394	0.00037	0.00441	10	0.00368		
35			37.90567	1.00000	4.52763		2.65953		0.1319
36									
37									

Лист9 / Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист14 / Лист15 / Лист16

Рис.2.20

В електронній таблиці передбачено запис наступних формул для одержання розрахункових числових даних:

формула =G5/G6 в осередку G10 – для розрахунку величини ρ ;

формула =D22 в осередку G11 – для посилання на осередок D22 з розрахунковою імовірністю одночасного простою робітників P_0;

формула =E35 в осередку G12 – для посилання на осередок E35 з розрахунковим математичним очікуванням числа пральних машин, що простоюють, $M_{сис}$;

формула =G12/G5 в осередку G13 – для розрахунку коефіцієнта простою пральної машини α;

формула =G35 в осередку G14 – для посилання на осередок G35 з розрахунковим математичним очікуванням середньої довжини черги $M_{оч}$;

формула =G14/G5 в осередку G15 – для розрахунку коефіцієнта простою пральних машин в очікуванні обслуговування β;

формула =G15/G5 в осередку G16 – для розрахунку середнього часу очікування обслуговування $\overline{T}_{ож}$ (в *годинах*);

формула =G15*60 в осередку I16 – для розрахунку середнього часу очікування обслуговування $\overline{T}_{ож}$ (в *хвилинах)*;

формула =I35 в осередку G17 – для посилання на осередок I35 із розрахунковим математичним очікуванням середньої довжини черги $M_{ск}$;

формула =G17/G4 в осередку G18 – для розрахунку коефіцієнта простою пральних машин в очікуванні обслуговування γ;

формула =(12-A22)*C22*$G$10/A23 в осередку C23 – для розрахунку величини $(12-i)P_i\rho$ при i = 1;

формула =СУМ(C22:C34) в осередку C35;

формула =1/C35 в осередку D22 – для розрахунку імовірності P_0;

формула =$D$22*C23 в осередку D23 – для розрахунку імовірності P_{i} при $i = 1$;

формула =СУМ(D22:D34) в осередку D35;

формула =A22*D22 в осередку E22 – для розрахунку величини $i * P_{\text{i}}$ при $i = 0$;

формула =СУМ(E22:E34) в осередку E35;

формула =A24–2 в осередку F24;

формула =A22*D24 в осередку G24 – для розрахунку величини $(i–2) * P_{\text{i}}$ при $i = 2$;

формула =СУМ(G24:G34) в осередку G35;

формула =$G$4–A22 в осередку H22 – для розрахунку величини $(r-i)$ при $i = 0$;

формула =H22*D22 в осередку I22 – для розрахунку величини $(r-i) * P_{\text{i}}$ при $i = 0$;

формула =СУМ(I22:I23) в осередку I35.

В електронній таблиці передбачено запис наступних формул для одержання процентних числових даних:

формула =G11 в осередку I11 – для посилання на осередок G11 із метою одержання часу одночасного простою робітників у відсотках від загального робочого часу;

формула =G13 в осередку I13 – для посилання на осередок G13 із метою одержання часу простою однієї пральної машини у відсотках від загального робочого часу;

формула =G15 в осередку I15 – для посилання на осередок G15 із метою одержання часу простою однієї пральної машини через очікування в черзі у відсотках від загального робочого часу;

формула =G18 в осередку I18 – для посилання на осередок G18 із метою одержання часу простою одного робітника у відсотках від загального робочого часу;

Для завершення формування електронної таблиці необхідно послідовно скопіювати формули:

з осередку C23 в осередки C24:C34 для одержання величини $(12-i)P_i\rho$ при i =2,3, …,12;

з осередку D23 в осередки D24:D34 для розрахунку імовірності P_i при i=2,3,…,12;

з осередку E22 в осередки E23:E34 для розрахунку імовірності $i{*}P_\text{i}$ при i =1,2,…,12;

з осередку F24 в осередки F25:F34 для розрахунку величини $(i–2)$ при i=3,4,…,12;

з осередку H22 в осередок H23 для розрахунку розміру $(r–i)$ при i =1;

з осередку I22 в осередок I23 для розрахунку імовірності $(r–i){*}P_\text{i}$ при i=1.

Електронна таблиця, подана у вигляді фраґментів на рис.2.19 і 2.20, може бути успішно використана для розрахунку показників функціонування будь-якої двоканальної замкнутої системи масового обслуговування з дванадцятьма об'єктами, що працює в сталому режимі. Для цього досить підставити в електронну таблицю відповідні вхідні дані.

2.7.6. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи MathCAD 2000.

Тепер розглянемо несталий режим роботи багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування, коли основні імовірнісні характеристики її залежать від інтервалу часу, на якому вони розглядаються. У цьому випадку інтенсивності вхідних і вихідних потоків для кожного стану системи, поданої у вигляді розміченого графа станів на рис.2.10, будуть збалансовані, як це показано системою диференціальних рівнянь (2.39).

Для двоканальної замкнутої системи масового обслуговування система диференціальних рівнянь (2.39) трансформується в систему

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - m\lambda P_0(t),$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = 2\mu P_2(t) - (\mu + (m-1)\lambda)P_1(t) + m\lambda P_0(t),$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = 3\mu P_3(t) - (2\mu + (m-2)\lambda)P_2(t) + (m-1)\lambda P_1(t),$$

$$\dots \qquad (2.105)$$

$$dP$$

$$\frac{P_i(t)}{dt} = (i+1)\mu P_{i+1}(t) - (i\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t),$$

$$i = \overline{1, r-1},$$

$$\dots$$

$$\frac{dP_r(t)}{dt} = r\mu P_{r+1}(t) - (r\mu + (m-r)\lambda)P_r(t) + (m-(r-1))\lambda P_{r-1}(t),$$

$$\dots$$

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = r\mu P_{i+1}(t) - (r\mu + (m-i)\lambda)P_i(t) + (m-(i-1))\lambda P_{i-1}(t),$$

$$i = \overline{r, m},$$

$$\dots$$

$$\frac{dP_m(t)}{dt} = -r\mu P_m(t) + \lambda P_{m-1}(t).$$

Для вирішення системи диференціальних рівнянь з метою визначення імовірностей $P_i(t)$ доцільно використовувати інформаційну систему *MathCAD 2000*. Розглянемо рекомендовану технологію більш докладно на *прикладі 2.6*, припустивши, що основні імовірнісні характеристики лазне-прального комбінату залежать від часу, наприклад, протягом однієї години.

Послідовність вирішення

Насамперед, необхідно побудувати систему диференціальних рівнянь для конкретних умов функціонування лазне-прального комбінату, а саме: число каналів r=2 (два робітники); число об'єктів обслуговування m=12 (дванадцять пральних машин); інтенсивність вхідного потоку вимог λ = 5 *вим./год.*; інтенсивність вихідного потоку вимог μ = 20 *вим./год.*

Для зазначених умов система (2.105) набуває вигляду:

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0(t)}{dt} &= \mu P_1(t) - 12\lambda P_0(t),\\
\frac{dP_1(t)}{dt} &= 2\mu P_2(t) - (\mu + 11\lambda)P_1(t) + 12\lambda P_0(t),\\
\frac{dP_2(t)}{dt} &= 2\mu P_3(t) - (2\mu + 10\lambda)P_2(t) + 11\lambda P_1(t),\\
\frac{dP_3(t)}{dt} &= 2\mu P_4(t) - (2\mu + 9\lambda)P_3(t) + 10\lambda P_2(t),\\
\frac{dP_4(t)}{dt} &= 2\mu P_5(t) - (\mu + 8\lambda)P_4(t) + 9\lambda P_3(t),\\
\frac{dP_5(t)}{dt} &= 2\mu P_6(t) - (\mu + 7\lambda)P_5(t) + 8\lambda P_4(t),\\
\frac{dP_6(t)}{dt} &= 2\mu P_7(t) - (\mu + 6\lambda)P_6(t) + 7\lambda P_5(t),\\
\frac{dP_7(t)}{dt} &= 2\mu P_8(t) - (\mu + 5\lambda)P_7(t) + 6\lambda P_6(t),\\
\frac{dP_8(t)}{dt} &= 2\mu P_9(t) - (\mu + 4\lambda)P_8(t) + 5\lambda P_7(t),\\
\frac{dP_9(t)}{dt} &= 2\mu P_{10}(t) - (\mu + 3\lambda)P_9(t) + 4\lambda P_8(t),\\
\frac{dP_{10}(t)}{dt} &= 2\mu P_{11}(t) - (\mu + 2\lambda)P_{10}(t) + 3\lambda P_9(t),\\
\frac{dP_{11}(t)}{dt} &= 2\mu P_{12}(t) - (\mu + \lambda)P_{11}(t) + 2\lambda P_{10}(t),\\
\frac{dP_{12}(t)}{dt} &= -2\mu P_6(t) + \lambda P_5(t).
\end{aligned}
\qquad (2.106)
$$

У системі (2.106) величини λ, μ не заміняються їхніми числовими значеннями з метою більш швидкої адаптації виразів у (2.106) до умов нових задач у випадку появи останніх.

Етапи процесу вирішення задачі відображені на рис.2.21–2.23. Усі необхідні дії і пояснення до них аналогічні діям і поясненням, викладеним у підрозділі 2.7.3.

Визначення параметрів функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в неусталому режимі

1.Вхідні дані: $\lambda := 5 \quad \mu := 20$

2 Функція вектора відхилень D(t,P) та початкове значення вектора відхилень P

$$D(t,P) := \begin{bmatrix} \mu \cdot P_1 - 12 \cdot \lambda \cdot P_0 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_2 - (\mu + 11 \cdot \lambda) \cdot P_1 + 12 \cdot \lambda \cdot P_0 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_3 - (2 \cdot \mu + 10 \cdot \lambda) \cdot P_2 + 11 \cdot \lambda \cdot P_1 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_4 - (2 \cdot \mu + 9 \cdot \lambda) \cdot P_3 + 10 \cdot \lambda \cdot P_2 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_5 - (2 \cdot \mu + 8 \cdot \lambda) \cdot P_4 + 9 \cdot \lambda \cdot P_3 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_6 - (2 \cdot \mu + 7 \cdot \lambda) \cdot P_5 + 8 \cdot \lambda \cdot P_4 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_7 - (2 \cdot \mu + 6 \cdot \lambda) \cdot P_6 + 7 \cdot \lambda \cdot P_5 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_8 - (2 \cdot \mu + 5 \cdot \lambda) \cdot P_7 + 6 \cdot \lambda \cdot P_6 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_9 - (2 \cdot \mu + 4 \cdot \lambda) \cdot P_8 + 5 \cdot \lambda \cdot P_7 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_{10} - (2 \cdot \mu + 3 \cdot \lambda) \cdot P_9 + 4 \cdot \lambda \cdot P_8 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_{11} - (2 \cdot \mu + 2 \cdot \lambda) \cdot P_{10} + 3 \cdot \lambda \cdot P_9 \\ 2 \cdot \mu \cdot P_{12} - (2 \cdot \mu + \lambda) \cdot P_{11} + 2 \cdot \lambda \cdot P_{10} \\ \lambda \cdot P_{11} - 2 \cdot \mu \cdot P_{12} \end{bmatrix} \qquad P := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Додаткові параметри: $t0 := 0 \quad t1 := 1 \quad N := 100$

4. Пошук рішення: $S := \mathrm{rkfixed}(P, t0, t1, N, D)$

$t := S^{\langle 0 \rangle} \quad P_0 := S^{\langle 1 \rangle} \quad P_1 := S^{\langle 2 \rangle} \quad P_2 := S^{\langle 3 \rangle} \quad P_3 := S^{\langle 4 \rangle} \quad P_4 := S^{\langle 5 \rangle} \quad P_5 := S^{\langle 6 \rangle} \quad P_6 := S^{\langle 7 \rangle}$

$P_7 := S^{\langle 8 \rangle} \quad P_8 := S^{\langle 9 \rangle} \quad P_9 := S^{\langle 10 \rangle} \quad P_{10} := S^{\langle 11 \rangle} \quad P_{11} := S^{\langle 12 \rangle} \quad P_{12} := S^{\langle 13 \rangle}$

Рис.2.21

5.Виведення результату:

S =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.01	0.585	0.311	0.095	$.187\cdot10^{-3}$	$.094\cdot10^{-3}$	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.02	0.376	0.376	0.182	0.052	0.012	$.788\cdot10^{-3}$	$.657\cdot10^{-4}$	$.083\cdot10^{-5}$	$.354\cdot10^{-6}$	0	0	0	0
3	0.03	0.263	0.366	0.232	0.099	0.031	$.221\cdot10^{-3}$	$.313\cdot10^{-3}$	$.672\cdot10^{-4}$	$.606\cdot10^{-5}$	$.613\cdot10^{-7}$	$.335\cdot10^{-8}$	$598\cdot10^{-10}$	$459\cdot10^{-12}$
4	0.04	0.197	0.336	0.253	0.137	0.055	0.017	$3.85\cdot10^{-3}$	$.687\cdot10^{-4}$	$.627\cdot10^{-5}$	$.816\cdot10^{-6}$	$.772\cdot10^{-7}$	$.683\cdot10^{-8}$	$526\cdot10^{-10}$
5	0.05	0.156	0.304	0.259	0.164	0.079	0.029	$.131\cdot10^{-3}$	$.743\cdot10^{-3}$	$.798\cdot10^{-4}$	$.235\cdot10^{-5}$	$.541\cdot10^{-6}$	$.202\cdot10^{-7}$	$.573\cdot10^{-9}$
6	0.06	0.129	0.275	0.255	0.181	0.099	0.042	0.014	$.531\cdot10^{-3}$	$.732\cdot10^{-4}$	$.343\cdot10^{-5}$	$.889\cdot10^{-6}$	$.165\cdot10^{-7}$	$.377\cdot10^{-8}$
7	0.07	0.11	0.25	0.248	0.191	0.116	0.056	0.021	$.049\cdot10^{-3}$	$.329\cdot10^{-3}$	$.138\cdot10^{-4}$	$.375\cdot10^{-5}$	$.624\cdot10^{-6}$	$.136\cdot10^{-8}$
8	0.08	0.096	0.229	0.238	0.197	0.13	0.068	0.028	$.216\cdot10^{-3}$	$2.28\cdot10^{-3}$	$.155\cdot10^{-4}$	$.254\cdot10^{-5}$	$.112\cdot10^{-6}$	$.498\cdot10^{-7}$
9	0.09	0.086	0.212	0.229	0.199	0.141	0.08	0.036	0.013	$.529\cdot10^{-3}$	$.154\cdot10^{-4}$	$.011\cdot10^{-4}$	$.885\cdot10^{-6}$	$.652\cdot10^{-7}$
10	0.1	0.078	0.197	0.219	0.2	0.149	0.09	0.044	0.017	$.055\cdot10^{-3}$	$.123\cdot10^{-3}$	$.748\cdot10^{-4}$	$1.7\cdot10^{-5}$	$.758\cdot10^{-7}$
11	0.11	0.071	0.185	0.211	0.199	0.155	0.099	0.051	0.021	$.818\cdot10^{-3}$	$.641\cdot10^{-3}$	$2.78\cdot10^{-4}$	$.954\cdot10^{-5}$	$.479\cdot10^{-6}$
12	0.12	0.066	0.174	0.202	0.197	0.159	0.106	0.058	0.026	$.771\cdot10^{-3}$	$.265\cdot10^{-3}$	$.134\cdot10^{-4}$	$.752\cdot10^{-5}$	$.584\cdot10^{-6}$
13	0.13	0.062	0.165	0.195	0.194	0.162	0.113	0.065	0.03	0.011	$.985\cdot10^{-3}$	$.822\cdot10^{-4}$	$.177\cdot10^{-5}$	$4.2\cdot10^{-6}$
14	0.14	0.058	0.157	0.188	0.191	0.165	0.119	0.071	0.034	0.013	$.789\cdot10^{-3}$	$.838\cdot10^{-4}$	$.029\cdot10^{-4}$	$.432\cdot10^{-6}$
15	0.15	0.055	0.15	0.182	0.189	0.166	0.123	0.076	0.038	0.015	$.662\cdot10^{-3}$	$.017\cdot10^{-3}$	$.411\cdot10^{-4}$	$.367\cdot10^{-6}$
16	0.16	0.052	0.143	0.176	0.186	0.167	0.127	0.081	0.042	0.018	$5.59\cdot10^{-3}$	$.278\cdot10^{-3}$	$.866\cdot10^{-4}$	$.307\cdot10^{-5}$
17	0.17	0.05	0.138	0.171	0.183	0.168	0.131	0.086	0.046	0.02	$.559\cdot10^{-3}$	$.564\cdot10^{-3}$	$.391\cdot10^{-4}$	$.758\cdot10^{-5}$
18	0.18	0.048	0.133	0.166	0.18	0.168	0.134	0.09	0.05	0.022	$.553\cdot10^{-3}$	$.871\cdot10^{-3}$	$.981\cdot10^{-4}$	$.291\cdot10^{-5}$
19	0.19	0.046	0.129	0.162	0.177	0.168	0.136	0.093	0.053	0.024	$.563\cdot10^{-3}$	$.196\cdot10^{-3}$	$.632\cdot10^{-4}$	$.906\cdot10^{-5}$
20	0.2	0.044	0.125	0.158	0.175	0.168	0.139	0.097	0.056	0.026	$.577\cdot10^{-3}$	$.534\cdot10^{-3}$	$.335\cdot10^{-4}$	$.597\cdot10^{-5}$
21	0.21	0.043	0.121	0.154	0.173	0.168	0.14	0.1	0.059	0.028	0.011	$.881\cdot10^{-3}$	$.083\cdot10^{-4}$	$4.36\cdot10^{-5}$
22	0.22	0.041	0.118	0.151	0.17	0.167	0.142	0.103	0.062	0.03	0.012	$.234\cdot10^{-3}$	$.868\cdot10^{-4}$	$.189\cdot10^{-5}$
23	0.23	0.04	0.115	0.148	0.168	0.167	0.143	0.105	0.064	0.032	0.013	$3.59\cdot10^{-3}$	$.682\cdot10^{-4}$	$.074\cdot10^{-5}$
24	0.24	0.039	0.112	0.145	0.166	0.166	0.145	0.107	0.067	0.034	0.014	$.946\cdot10^{-3}$	$.517\cdot10^{-4}$	$.008\cdot10^{-5}$

Рис.2.22

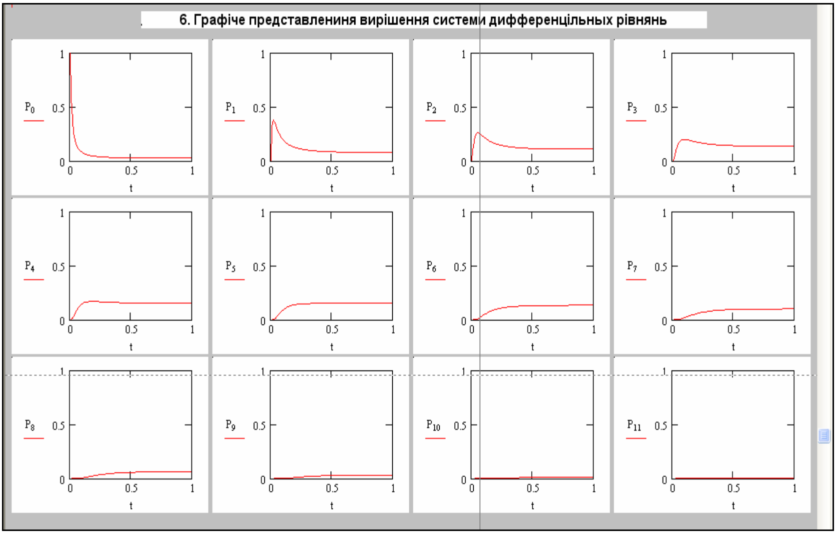


Рис.2.23

Аналізуючи результати вирішення, подані у вигляді матриці-таблиці **S**, можна констатувати, що приблизно через 0,912 години (55 хвилин) система переходить у сталий режим роботи. При цьому імовірності станів сталого режиму роботи системи приймають значення: P_0=0,026, P_1=0,079, P_2=0,109, P_3=0,136, P_4=0,153, P_5=0,153, P_6=0,134, P_7=0,100, P_8=0,065, P_9=0,031, P_{10}=0,012, P_{11}=0,002, P_{12}=0. Отримані результати збігаються з результатами розрахунку цих же імовірностей у сталому режимі (див. рис.2.20).

Тема 2.8. Системи масового обслуговування з відмовами

2.8.1. *Одноканальна система масового обслуговування з відмовами*

Усі можливі стани одноканальної системи масового обслуговування з відмовами представляються у вигляді розміченого графа станів, зображеного на рис.2.11.

Для одноканальних систем масового обслуговування з відмовами характерні такі особливості:

наявність одного каналу обслуговування, $r = 1$;

число можливих станів системи i, зв'язане з числом вимог у системі, скінченне і приймає значення 0 або 1;

вимога, що поступає в систему, негайно обслуговується, якщо канал вільний;

вимога , що поступає в систему, покидає її не обслугованою, якщо канал зайнятий.

Задача про визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вхідними параметрами вирішення задачі служать:

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміри, що і потік вимог).

Основні показники одноканальної системи масового обслуговування з відмовами обчислюють за нижченаведеними формулами.

1. *Коефіцієнт завантаження, або відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного*, визначається за формулою (2.41): $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Задача розрахунку показників функціонування становить інтерес при $\rho \le 1$.

2. *Імовірність перебування* системи в стані P_1 (канал обслуговування зайнятий) визначають за формулою:

$$P_1 = \rho P_0 . \tag{2.107}$$

3. *Імовірність перебування* системи в стані P_0 (канал обслуговування вільний). Сума імовірностей усіх станів системи дорівнює одиниці: $P_0 + P_1 = 1$. З урахуванням (2.107) $P_0 = 1 - \rho P_0$. Звідки

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} . \tag{2.108}$$

Для одноканальної системи імовірність P_0 (того що канал вільний) відповідає *відносній продуктивності* системи q. Вимога буде обслугована тільки в тому випадку, якщо в момент її надходження в систему канал буде вільний.

Імовірність перебування системи в стані P_0 дозволяє визначити *середній відсоток обслугованих вимог* $m_{об}$ шляхом множення P_1 на 100%.

4. *Абсолютну продуктивність* системи в одиницю часу знаходимо за формулою

$$A = \lambda P_0 . \tag{2.109}$$

5. *Імовірність відмови* вимозі в обслуговуванні збігається з імовірністю *перебування* системи в стані P_1 і визначається за формулою

$$P_1 = 1 - P_0 = 1 - \frac{1}{1+\rho} = \frac{\rho}{1+\rho} . \tag{2.110}$$

Імовірність відмови P_1 дозволяє визначити *середній відсоток необслугованих вимог* $m_{\text{но}}$ шляхом множення P_0 на 100%.

Приклад 2.8. На вагоноремонтному заводі з цеху гарячого штампування в середньому за 1 година поступає на контроль 8 деталей. Час обслуговування однієї деталі контролером дорівнює $t_{\text{обс}}$ = 5 *хв.* = 0,12 *год.* Визначити показники функціонування системи. Потік вимог – пуассонівський, час обслуговування – показовий.

Вирішення. Вихідні дані завдання:

інтенсивність вхідного потоку вимог $\lambda = 8$ *вим./год.*;

інтенсивність вихідного потоку вимог $\mu = \dfrac{1}{t_{обс}} = 12$ *вим./год.*

Оскільки контроль здійснюється одним контролером, а готові деталі, якщо контролер не вільний, залишаються неперевіреними, то організація контролю на заводі відповідає одноканальній системі масового обслуговування з відмовами. Для розрахунку основних показників функціонування такої системи використовуємо формули (2.41) і (2.208) – (2.210).

7. Знаходимо величину ρ за формулою (2.41) :

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{12} = 0{,}6667 < 1 \ .$$

8. Визначаємо імовірність знаходження системи в стані P_0 (контролер вільний) за формулою (2.208) :

$$P_0 = \frac{1}{1+\rho} = 0{,}6 \ .$$

9. Визначаємо середній відсоток вимог, що обслуговуються:

$$m_{\text{об}} = P_0 \cdot 100\% = 60\%$$

10. Знаходимо абсолютну *продуктивність* контролера за одну годину за формулою (2.109) :

$$A = \lambda P_0 = 4{,}8 \ \textit{дет./год.}$$

11. Визначаємо імовірність знаходження системи в стані P_1 (контролер зайнятий) за формулою (2.209):

$$P_1 = \frac{\rho}{1+\rho} = 0{,}4 \quad \text{або} \quad P_1 = 1 - P_0 = 0{,}4.$$

12. Визначаємо середній відсоток необслугованих вимог:

$$m_{\text{ноб}} = P_1 \cdot 100\% = 40\% .$$

Якби деталі поступали рівномірно й очікували обслуговування (не було відмов), то продуктивність контролера була б на 40% вище.

2.8.2. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами

Усі можливі стани багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами представляються у вигляді розміченого графа станів, як показано на рис.2.12.

Для багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами характерні такі особливості:

наявність декількох каналів обслуговування, $r > 1$;

канал у кожний момент часу може обслуговувати тільки одну вимогу;

число можливих станів системи i, що зв'язане з числом вимог, які знаходяться в системі, скінченне і приймає значення від 0 до r;

вимога , що поступає в систему, негайно обслуговується, якщо хоча б один канал вільний;

вимога , що поступає в систему, покидає її не обслугованою, якщо всі канали зайняті.

Задача з визначення показників такої системи вирішується при наявності пуассонівського розподілу потоку вимог і показового закону розподілу часу обслуговування. Вихідними параметрами вирішення задачі служать:

λ – середня кількість вимог, що поступають на обслуговування в одиницю часу;

μ – середня продуктивність обслуговуючого каналу (у тих же одиницях виміри, що і потік вимог).

Основні показники багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами обчислюють за нижченаведеними формулами.

1. *Коефіцієнт завантаження, або відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного*, визначають за формулою (2.41): $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Задача розрахунку показників функціонування становить інтерес при $\rho \le r$.

2. *Імовірності одночасного перебування i вимог* у системі P_i визначають за такими формулами:

імовірність одночасного перебування в системі 1-ї вимоги

$$P_1 = \rho P_0 \ ; \qquad (2.111)$$

де P_0 – імовірність відсутності вимог у системі;

імовірність одночасного перебування в системі 2-х вимог

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 \ ; \qquad (2.112)$$

імовірність одночасного перебування в системі 3-х вимог

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 \ ; \qquad (2.113)$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі i вимог

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0 \ ; \qquad (2.114)$$

. . .

імовірність одночасного перебування в системі r вимог

$$P_r = \frac{\rho^r}{r!} P_0 \ . \qquad (2.115)$$

3. *Імовірність перебування* системи в стані P_0 (усі канали обслуговування вільні) обчислюють за формулою

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{r} \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1} . \qquad (2.116)$$

4. *Імовірність відмови черговому перебуванню* $P_{\text{від}}$ збігається з імовірністю знаходження системи в стані P_r (усі канали обслуговування зайняті), тобто визначається за формулою (2.115).

5. *Математичне очікування числа зайнятих каналів обслуговування* знаходимо за формулою

$$M_з = \sum_{i=1}^{r} iP_i . \qquad (2.117)$$

6. Відносний час роботи обслуговуючого каналу

$$\alpha = \frac{M_з}{r} . \qquad (2.117)$$

Приклад 2.9. У відділі технічного контролю працює в зміну 3 контролери. У середньому за одну годину в ВТК поступає 24 деталі. Час обслуговування однієї деталі контролером 5 *хв*. Визначити показники функціонування системи, якщо потік вимог найпростіший, а час обслуговування показовий.

Вирішення. Вхідні дані задачі:

число каналів обслуговування $r = 3$;
інтенсивність вхідного потоку вимог $\lambda = 24$ *дет./год.*;
інтенсивність вихідного потоку вимог $\mu = \frac{1}{t_{обс}} = 12$ *дет./год.*

Оскільки контроль здійснюється трьома контролерами ($r > 1$), а готові деталі, якщо всі контролери зайняті, залишаються неперевіреними, то організація контролю на заводі відповідає багатоканальній системі масового обслуговування з відмовами. Для розрахунку основних показників функціонування такої системи використовуємо формули (2.41) і (2.208) – (2.210).

1. Знаходимо розмір ρ за формулою (2.41):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{24}{12} = 2 < 3 = r \ .$$

2. Виражаємо імовірності P_i (i=0,1,2,3) через імовірність P_0 за допомогою формул (2.111) – (2.113):

$$P_0 = P_0;$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{2^1}{1!} P_0 \ ;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = \frac{2^2}{2!} P_0 = 2P_0 \ ;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = \frac{2^3}{3!} P_0 = 1{,}3333 P_0 \ .$$

3. *Імовірність перебування* системи в стані P_0 (усі канали обслуговування вільні) обчислюємо за формулою (2.116):

$$P_0 = \left(\sum_{i=0}^{3} \frac{\rho^i}{i!} \right)^{-1} = \left(1 + 2 + 2 + 1{,}3333\right)^{-1} = 0{,}1579 \ .$$

Отримана імовірність означає, що 15,79% усього робочого часу контролери простоюють одночасно.

4. Імовірність відмови черговій вимозі $P_{\text{від}}$ визначаємо як імовірність P_3 (імовірність того, що всі контролери зайняті), тобто за формулою (2.115):

$$P_{\text{від}} = P_з = 1{,}3333\text{P}0 = 1{,}3333 \cdot 0{,}1579 = 0{,}2105 \ .$$

Отримана імовірність означає, що 21,05% усіх деталей не будуть перевірені контролерами.

5. Математичне очікування числа зайнятих контролерів (каналів обслуговування) знаходимо за формулою (2.116):

$$M_з = \sum_{i=1}^{r} i P_i = 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1579 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1579 + 3 \cdot 1{,}3333 \cdot 0{,}1579 =$$

$$=1{,}579 \text{ чол.}$$

6. Відносний час роботи одного контролера визначаємо за формулою (2.117):

$$\alpha = \frac{M_з}{r} = \frac{1{,}579}{3} = 0{,}5263 \ .$$

Отриманий показник означає, що кожний контролер буде продуктивно працювати тільки 52,63% усього робочого часу .

2.8.3. Комп'ютерний розрахунок показників багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами

Для комп'ютерного розрахунку показників замкнутої системи масового обслуговування рекомендується використовувати інформаційну систему *Microsoft Excel.* Розглянемо використання інформаційної системи *Microsoft Excel* для розрахунку показників системи масового обслуговування, описаної в *прикладі 2.9*. На рис.2.24 показана електронна таблиця для проведення розрахунків показників функціонування триканальної системи з відмовами, що фігурує в цьому прикладі.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оцінка роботы відділу технічного контролю (триканальна система з відмовами)									
2		Основні характеристики відділу технічного контролю								
3					Кількість робочих місць r=	3				
4					Інтенсивність надходження вимог λ =	24	деталей за годину			
5					Середня продуктивність контролера μ =	12	деталей за годину			
6		Числові характеристики функціонування відділу технічного контролю								
7					ρ=λ/μ=	2	<=r=3			
8					Імовірність одночасного простою контролерів Po=	0.158	або	15.8%	робочого часу	
9					Імовірність відмови в контролі Pr=	0.211	або	21.1%	неперевірених деталей	
10					Матем. очікування числа зайнятих контролерів Mз=	1.6	чол.			
11					Середній час роботи одного контролера α=	0.53	або	53%	робочого часу	
12				Розрахункова таблиця						
13		i	Pi (P0, Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi				
14		0	P0=P0	1.00000	0.15789	0.00000				
15		1	P1=P0*ρ/1	2.00000	0.31579	0.31579				
16		2	P2=P1*ρ/2	2.00000	0.31579	0.63158				
17		3	P3=P2*ρ/3	1.33333	0.21053	0.63158				
18				6.33333	1.00000	1.57895				
19										

Лист10 Лист11 Лист12 Лист13 Лист15 Лист16 Лист17

Рис.2.24

В електронній таблиці передбачено наступний розподіл осередок для вхідних даних:

осередок F3 – для числа каналів обслуговування $r = 3$;

осередок F4 – для інтенсивності вхідного потоку вимог $\lambda = 20$;

осередок F5 – для інтенсивності вихідного потоку вимог $\mu = 12$;

осередки B14:B17 – для значень параметру i ($i = 0,1,2,3$);

осередок D14 – для константи 1;

В електронній таблиці передбачений запис таких формул для одержання розрахункових числових даних:

формула =F4/F5 в осередку F7 – для розрахунку величини ρ;

формула =E14 в осередку F8 – для посилання на осередок E14 з розрахунковою імовірністю одночасного простою контролерів P_0;

формула =E17 в осередку F9 – для посилання на осередок E17 з розрахунковою імовірністю одночасної зайнятості всіх контролерів P_r;

формула =F18 в осередку F10 – для посилання на осередок F18 з розрахунковим математичним очікуванням числа зайнятих контролерів $M_з$;

формула =F10/F3 в осередку F11 – для розрахунку відносного часу роботи одного контролера α;

формула =D14*$F$7 в осередку D15 – для розрахунку величини $\frac{\rho}{i} P_{i-1}$, рівної P_i / P_0, при $i = 0$;

формула =СУММ(D14:D17) в осередку D18;

формула =1/D18 в осередку E14 – для розрахунку імовірності P_0;

формула =$E$14*D15 в осередку E15 – для розрахунку імовірності P_i при $i = 1$;

формула =СУММ(E14:E17) в осередку E18;

формула =B14*E14 в осередку F14 – для розрахунку розміру $i * P_i$ при $i = 0$;

формула =СУММ(F14:F17) в осередку F18.

В електронній таблиці передбачено запис таких формул для одержання процентних числових даних:

формула =F8 в осередку H8 – для посилання на осередок F8 з метою одержання часу простою робітника у відсотках від загального робочого часу;

формула =F9 в осередку H9 – для посилання на осередок F9 з метою одержання кількості неперевірених деталей у відсотках від загального числа деталей;

формула =F11 в осередку H11 – для посилання на осередок F11 з метою одержання середнього часу роботи одного контролера у відсотках від загального робочого часу.

Для завершення формування електронної таблиці потрібно послідовно скопіювати формули:

з осередку D15 в осередки D16:D17 для одержання величини $\frac{\rho}{i}P_{i-1}$, рівної P_{i} / P_0, при $i = 2,3$;

з осередку E14 в осередки E15:E17 для розрахунку імовірності P_{i} при i=1,2,3;

з осередку F14 в осередки F15:F17 для розрахунку імовірності $i{*}P_{\text{i}}$ при i=1,2,3.

Наведена на рис.2.24 електронна таблиця може бути успішно використана для будь-якої триканальної системи масового обслуговування з відмовами. Для цього досить підставити в електронну таблицю відповідні вхідні дані.

2.8.4. Дослідження математичних моделей багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel

Аналіз результатів вирішення задачі з *прикладу 2.9* приводить до думки скоротити число контролерів ВТК до двох із метою збільшити показники зайнятості контролерів: $M_з$ і α .

Раніше зазначалося, що електронну таблицю, показану на рис.2.24, можна використовувати для розрахунку будь-якої триканальної системи масового обслуговування, що відрізняються інтенсивностями вхідного і вихідного потоків. У нашому ж випадку потрібно зменшити *число каналів* обслуговування з трьох до двох. Для моделювання двоканальної системи масового обслуговування з відмовами можна побудувати нову (спеціальну) електронну таблицю. Але більш вірним рішенням буде *автоматична генерація нової таблиці* на основі раніше створеної таблиці.

Покажемо генерацію електронної таблиці для двоканальної системи масового обслуговування з відмовами на основі електронної таблиці, зображеної на рис.2.24. Щоб цю таблицю перетворити в таблицю для двоканальної системи, досить зробити наступні дії:

в осередку F6 замість числа 3 ввести число 2 (кількість каналів r);

в осередку F10 формулу з посиланням на осередок E17 замінити на формулу =E16, тобто змінити вказівку на місце положення величини P_r;

виділити рядок F17 і видалити його командою ***Виправлення/Видалити***.

У результаті проведення зазначених дій одержимо електронну таблицю з розрахунком показників функціонування двоканальної системи масового обслуговування з відмовами (рис.2.25). З таблиці випливає, якщо ВТК буде складатися з двох контролерів, то імовірність відмови черговій вимозі дорівнюватиме 0,4 (40% деталей залишаться без перевірки), а відносний час роботи одного контролера α складатиме 0,6 (60% робочого часу контролер буде зайнятий). Як бачимо, погіршення показника α пов'язано з поліпшенням показника P_r.

У процесі дослідження математичних моделей багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel* не менш важливим є моделювання нових систем із збільшеним числом каналів обслуговування r.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оцінка роботи відділу технічного контролю (двоканальна система з відмовами)									
2		Основні характеристики відділу технічного контролю								
3					Кількість робочих місць r=	2				
4					Інтенсивність надходження вимог λ =	24	деталей за годину			
5					Середня продуктивність контролера μ =	12	деталей за годину			
6		Числові характеристики функціонування відділу технічного контролю								
7					ρ=λ/μ=	2	<=r=2			
8					Імовірність одночасного простою контролерів P0=	0.200	або	20.0%	робочого часу	
9					Імовірність відмови в контролі Pr=	0.400	або	40.0%	неперевірених деталей	
10					Матем. очікування числа зайнятих контролерів Mз=	1.2	чол.			
11					Середній час роботи одного контролера α=	0.60	або	60%	робочого часу	
12				Розрахункова таблиця						
13		i	Pi (P0,Pi-1)	Pi/P0	Pi	iPi				
14		0	P0=P0	1.00000	0.20000	0.00000				
15		1	P1=P0*ρ/1	2.00000	0.40000	0.40000				
16		2	P2=P1*ρ/2	2.00000	0.40000	0.80000				
17				5.00000	1.00000	1.20000				
18										
19										

Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист15 / Лист16 / Лист17

Рис.2.25

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Оцінка роботи відділу технічного контролю (чотириканальна система з відмовами)									
2		Основні характеристики відділу техничного контролю								
3			Кількість робочих місць r=			4				
4			Інтенсивність надходження вимог λ=			24	деталей за годину			
5			Середня продуктивність контролера μ =			12	деталей за годину			
6		Числові характеристики функціонування відділу технічного контролю								
7					$\rho=\lambda/\mu=$	2	<=r=4			
8	Імовірність одночасного простою контролерів Po=					0.143	або	14.3%	робочого часу	
9			Імовірність відмови в контролі Pr=			0.095	або	9.5%	неперевірених деталей	
10	Матем. очікування числа зайнятих контролерів Мз=					1.8	чол.			
11		Середній час роботи одного контролера α=				0.45	або	45%	робочого часу	
12				Розрахункова таблиця						
13		i	$P_i(P_0,P_{i-1})$	P_i/P_0	P_i	iP_i				
14		0	$P_0=P_0$	1.00000	0.14286	0.00000				
15		1	$P_1=P_0*\rho/1$	2.00000	0.28571	0.28571				
16		2	$P_2=P_1*\rho/2$	2.00000	0.28571	0.57143				
17		3	$P_3=P_2*\rho/3$	1.33333	0.19048	0.57143				
18		4	$P_4=P_3*\rho/4$	0.66667	0.09524	0.38095				
19				7.00000	1.00000	1.80952				
20										

Лист10 / Лист11 / Лист12 / Лист13 / Лист15 / Лист16 / Лист17

Рис.2.26

Покажемо генерацію електронної таблиці для чотириканальної системи масового обслуговування з відмовами на основі електронної таблиці, зображеної на рис.2.24. Щоб цю таблицю перетворити в таблицю для чотириканальної системи варто зробити наступні дії:

в осередку F6 замість числа 3 увести число 4 (кількість каналів r);

в осередку F10 формулу з посиланням на осередок E17 замінити на формулу =E18, тобто змінити вказівку на місце положення величини P_r;

виділити рядок F17 і вставити порожній рядок командою ***Вставка/Рядки***;

скопіювати формули з осередків D16: F16 в осередки D17: F18;

в осередок B18 увести число 4;

в осередок C18 увести текст «”«**’P4=P3*/r4**» (необов’язково).

У результаті проведення зазначених дій одержимо електронну таблицю з розрахунком показників функціонування чотириканальної системи масового обслуговування з відмовами (рис.2.26). З таблиці випливає, якщо ВТК буде налічувати чотирьох контролерів, то імовірність відмови черговій вимозі P_r буде дорівнювати 0,095 (9,5% деталей залишаться без перевірки), а відносний час роботи одного контролера α складатиме 0,45 (тільки 45% робочого часу кожний контролер буде зайнятий). Як бачимо, поліпшення показника α зв'язано з погіршенням показника P_r.

У свою чергу, з електронної таблиці для чотириканальної системи масового обслуговування з відмовами можна одержати таблицю для п’ятиканальної системи і т.д.

На закінчення відзначимо, що суперечливість критеріїв (показників) функціонування багатоканальних систем масового обслуговування вимагає для остаточного вибору числа обслуговуючих каналів додаткового розрахунку, економічних показників.

Індивідуальні завдання до розділу 2

Для придбання практичних навиків з використання математичних методів і сучасних інформаційних технологій при вирішенні конкретних задач теорії масового обслуговування студенти повинні виконати *контрольну роботу* №2, що складається з трьох індивідуальних завдань.

Завдання №1

Умова завдання. У порту є причали для розвантаження вантажних судів. Інтенсивність потоку судів дорівнює λ судів у добу. Середній час розвантаження судна складає s доби. Передбачається, що черга судів, що очікують розвантаження, може бути необмеженої довжини. Визначити основні показники функціонування порту.

Параметри завдання r, λ і s кожним студентом вибираються з табл.2.9 відповідно до його студента. Варіант визначається за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Таблиця 2.9 – Параметри завдання залежно від варіанта

Пара-метр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
λ (*діб*$^{-1}$)	0,5	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9
s	2	3	2	3	2	3	2	3	2	3

Вимоги до звіту студента про виконання індивідуального завдання №1. Звіт повинен містити:

умову завдання з індивідуальними вхідними даними, обраними відповідно до варіанта;

ланцюг Маркова для системи масового обслуговування в умовах завдання (див. рис.2.4 в п.2.5.2);

перевірку умови функціонування розімкнутої системи;

розрахунок показників функціонування (імовірності одночасного перебування в порту декількох суден, імовірність відсутності суден у порту, імовірність появи черги суден, середня довжина черги, середній час очікування розвантаження, середнє число вільних причалів, коефіцієнт простою причалу).

Завдання №2

Умова завдання. Робітник обслуговує групу з m верстатів. Кожний верстат зупиняється в середньому λ разів за годину. Процес налагоджування займає в середньому t *год.* Визначити основні показники роботи наладчика і функціонування верстатів.

Параметри завдання m, λ і t кожним студентом вибираються з табл.2.10 відповідно до його варіанта. Варіант визначається за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Таблиця 2.10 – Параметри завдання залежно від варіанта

Пара-метр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
λ (*год.*$^{-1}$)	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
t (*год.)*	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2

Вимоги до звіту студента про виконання індивідуального завдання №2. Звіт повинен містити:

умову завдання з індивідуальними вхідними даними, обраними відповідно до варіанта;

ланцюг Маркова для системи масового обслуговування в умовах завдання (див. рис.2.9 у п.2.5.7);

розрахунок показників функціонування (імовірність простою робітника; імовірність зайнятості робітника; математичне очікування числа верстатів, що вимагають налагоджування; коефіцієнт простою верстата; середня довжина черги; коефіцієнта простою верстата в очікуванні налагоджування; середній час очікування налагоджування).

Завдання №3

Умова завдання. В обчислювальний центр колективного користування з r комп'ютерами поступають замовлення на обчислювальні роботи від різних фірм. Якщо всі комп'ютери зайняті роботою, то замовлення, що поступає до центру, не приймається і фірма змушена звертатися в іншій обчислювальний центр. Середній час виконання замовлення складає 4 *год.* Інтенсивність потоку заявок є величина λ. Визначити основні показники функціонування обчислювального центру.

Параметри завдання m, λ і t кожним студентом вибираються з табл.2.11 відповідно до його варіанта. Варіант визначається за останньою цифрою номера залікової книжки студента.

Таблиця 2.11 – Параметри завдання залежно від варіанта

Параметр	Варіант									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
$\lambda\left(год.^{-1}\right)$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

Вимоги до звіту студента про виконання індивідуального завдання №3. Звіт повинен містити:

умову завдання з індивідуальними вихідними даними, обраними відповідно до варіанта;

ланцюг Маркова для системи масового обслуговування в умовах завдання (див. рис.2.12 у п.2.5.10);

розрахунок показників функціонування обчислювального центру (коефіцієнт завантаження, імовірності одночасного перебування в системі декількох замовлень, імовірність відсутності замовлень, коефіцієнт простою комп'ютера, абсолютна продуктивність обчислювального центру, імовірність відмови в обслуговуванні);

розрахунок показників функціонування обчислювального центру за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel* з роздрукiвками фрагментів відповідної електронної таблиці (див. п. 2.8.3 і 2.8.4).

Вимоги до оформлення контрольної роботи №2. Контрольна робота повинна складатися з титульної сторінки (див. Додаток А) і трьох звітів про виконання індивідуальних завдань №1, №2 і №3 відповідно. Контрольна робота може бути надрукована на принтері або виконана в рукописному варіанті. У другому випадку роздруківки екранів відповідно до вимог індивідуального завдання №3 повинні бути акуратно вклеєні в рукописну контрольну роботу.

Запитання для контролю знань

1. Які основні економічні передумови постановки і вирішення екстремальних виробничих задач методами математичного програмування?
2. Сформулювати в загальному вигляді задачі математичного програмування.
3. Дати коротку характеристику основним класам задач математичного програмування.
4. Перерахувати етапи вирішення екстремальної задачі.
5. Дати визначення поняттям: критерій оптимальності, обмеження задачі, допустиме рішення, оптимальний план.
6. Сформулювати загальну задачу лінійного програмування.
7. У чому полягає відмінність задачі лінійного програмування від нелінійного?
8. Дати змістовну постановку і навести математичну модель транспортної задачі.
9. Чим закрита модель транспортної задачі відрізняється від відкритої? Яка необхідна умова для можливості розв'язання транспортної задачі?
10. У чому полягає сутність методу північно-західного кута при пошуку початкового опорного плану транспортної задачі?
11. Яка умова оптимальності опорного плану транспортної задачі? Дати визначення поняттям потенціалу і циклу в таблиці вирішення транспортної задачі.
12. У чому полягає метод потенціалів при пошуку оптимального опорного плану транспортної задачі?
13. Які переваги інформаційних технологій вирішення транспортної задачі перед традиційними технологіями?
14. На чому заснований вибір інформаційної системи (*Microsoft Excel* або *MathCAD* 2000) для проведення комп'ютерного вирішення транспортної задачі?

15. Сформулювати цілочислову транспортну задачу. Яка принципова відмінність математичної моделі цілочислової транспортної задачі від нецілочислової?
16. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про розподіл випуску продукції і навести її математичну модель.
17. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про вибір засобів доставки вантажів і навести її математичну модель.
18. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про двохетапне перевезення вантажів і навести її математичну модель.
19. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про двохетапне перевезення вантажів декількох видів і навести її математичну модель.
20. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про двохетапне перевезення вантажів декількох видів за запитами споживачів і привести її математичну модель.
21. Сформулювати цілочислову транспортну задачу про закриття підприємства і навести її математичну модель.
22. Сформулювати цілочислову задачу лінійного програмування.
23. Яке принципова відмінність математичної моделі задачі цілочислового лінійного програмування від нецілочислового?
24. Сформулювати цілочислову задачу лінійного програмування про розміщення вантажного флоту і навести її математичну модель.
25. Сформулювати цілочислову задачу лінійного програмування про розвезення вантажів і навести її математичну модель.
26. Які рекомендації щодо вибору комп'ютерної технології вирішення цілочислових задач лінійного програмування?
27. Навести приклади, що підтверджують прикладний характер теорії масового обслуговування.
28. Яка відмінна риса задач теорії масового обслуговування.
29. Дати визначення поняття «система масового обслуговування».
30. Перерахувати складові елементи систем масового обслуговування.
31. Дати класифікацію системам масового обслуговування за:

    характером надходження вимог;

    зв'язком між вимогами;

    реакцією вимог на зайнятість каналів обслуговування;

    типом очікування обслуговування;

вибором вимог на обслуговування;

числом каналів обслуговування;

пріоритетом завантаження каналів обслуговування.

32. Дати визначення пуассонівського закону розподілу випадкових величин.
33. Які властивості має найпростішого потоку вимог?
34. Який потік вимог є стаціонарним?
35. Який потік вимог є ординарним?
36. В якому потоці вимог відсутня післядія?
37. Дати визначення статистичному ряду розподілу випадкової величини. Який порядок його побудови?
38. Перерахувати основні показники функціонування систем масового обслуговування.
39. Як обчислюється економічна ефективність систем масового обслуговування?
40. Що являє собою ланцюг Маркова?
41. Скласти систему рівнянь Колмогорова, що характеризує процеси загибелі і розмноження в однорідних неперервних ланцюгах Маркова.
42. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи однорідних неперервних ланцюгів Маркова.
43. Які особливості розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування?
44. Навести приклад розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування.
45. Дати графічну інтепретацію розімкнутій системі масового обслуговування з необмеженим часом очікування у вигляді ланцюга Маркова.
46. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування.
47. Який порядок розрахунку основних показників функціонування розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування?
48. У чому полягають відмінності в розрахунках основних показників функціонування одноканальних і багатоканальних розімкнутих

систем масового обслуговування з необмеженим часом очікування?

49. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування розімкнутих систем масового обслуговування з необмеженим часом очікування?
50. Які особливості розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування?
51. Навести приклад розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженим часом.
52. Дати графічну інтепретацію розімкнутій системі масового обслуговування з обмеженим часом очікування у вигляді ланцюга Маркова.
53. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування.
54. Який порядок розрахунку основних показників функціонування розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженим часом очікування?
55. У чому полягає відмінності в розрахунках основних показників функціонування одноканальних і багатоканальних розімкнутих систем масового обслуговування з обмеженим часом очікування?
56. Які особливості розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги?
57. Навести приклад розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженим довжиною черги.
58. Дати графічну інтепретацію розімкнутій системі масового обслуговування з обмеженою довжиною черги у вигляді ланцюга Маркова.
59. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги.
60. Який порядок розрахунку основних показників функціонування розімкнутої системи масового обслуговування з обмеженою довжиною черги?
61. У чому полягають відмінності в розрахунках основних показників функціонування одноканальних і багатоканальних розімкнутих систем масового обслуговування з обмеженою довжиною черги?

62. Які особливості замкнутої системи масового обслуговування?
63. Навести приклад замкнутої системи масового обслуговування
64. Дати графічну інтепретацію одноканальної замкнутій системі масового обслуговування у вигляді ланцюга Маркова.
65. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи одноканальної замкнутої системи масового обслуговування.
66. Який порядок розрахунку основних показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування?
67. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування в сталому режимі її роботи?
68. Скласти систему рівнянь Колмогорова для несталого режиму роботи одноканальної замкнутої системи масового обслуговування.
69. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування в несталому режимі її роботи?
70. Дати графічну інтепретацію багатоканальної замкнутій системі масового обслуговування у вигляді ланцюга Маркова.
71. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування.
72. Який порядок розрахунку основних показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування?
73. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в сталому режимі її роботи?
74. Скласти систему рівнянь Колмогорова для несталого режиму роботи багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування.
75. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в несталому режимі її роботи?
76. Які особливості системи масового обслуговування з відмовами?

77. Навести приклад одноканальної системи масового обслуговування з відмовами.
78. Дати графічну інтепретацію одноканальної системі масового обслуговування з відмовами у вигляді ланцюга Маркова.
79. Скласти рівняння Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи одноканальної системи масового обслуговування з відмовами.
80. Який порядок розрахунку основних показників функціонування одноканальної системи масового обслуговування з відмовами?
81. Скласти рівняння Колмогорова для несталого режиму роботи одноканальної системи масового обслуговування з відмовами.
82. Навести приклад багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами.
83. Дати графічну інтепретацію багатоканальної системі масового обслуговування з відмовами у вигляді ланцюга Маркова.
84. Скласти систему рівнянь Колмогорова для стаціонарного (сталого) режиму роботи багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами.
85. Який порядок розрахунку основних показників функціонування багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами?
86. Яка інформаційна система рекомендується для комп'ютерного розрахунку основних показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в сталому режимі її роботи?
87. Які особливості використання інформаційних технологій у дослідженні систем масового обслуговування?

ДОДАТКИ

Додаток А

Зразок титульної сторінки для звітів про контрольні роботи

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА
Факультет заочного навчання

Контрольна робота з предмету ***Дослідження операцій*** .

Студент ***4-го*** курсу. Група ***ЕПМГ-1*** . Шифр ***20547***.

Прізвище, ім'я, по-батькові ***Савіна Олена Єреміївна***

Домашня адреса: ***23100, Вінницька обл., м. Жмеринка,***

вул. Гастелла, 20, кв 146.

Дата виконання роботи ***20.03.04*** . Варіант ***№ 7.***

Відмітка про залік ____________ Підпис викладача ____________

Додаток Б

Довідкові дані до розрахунку показників ефективності систем масового обслуговування

1. Сума членів нескінченної спадної прогресії

$$S = \frac{a_1}{1-q} ,$$

де a_1 – початковий член прогресії; q – знаменник прогресії.

2. Сума членів спадної прогресії

$$S = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} ,$$

де a_1 – початковий член прогресії; q – знаменник прогресії; n – число членів прогресії.

Список літератури

1. *Балашевич В.А*. Математические методы в управлении производством. - Минск: Высшая школа, 1976.
2. *Венцель Е.С.* Элементы динамического программирования. - М.: Наука, 1964.
3. *Венцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория вероятностей. - М.: Наука, 1973.
4. *Венцель Е.С*. Прикладные задачи теории вероятностей. - М.: Радио и связь, 1983.
5. *Вайну Я.Я.* Корреляция рядов динамики. - Т.: Статистика, 1977.
6. *Валовельская С.Н. и др.* Нелинейная корреляция и регрессия. – К.: Техника, 1971.
7. *Гольштейн Е.Г.* Задачи линейного программирования транспортного типа. - М.: Наука, 1969.
8. *Евдокимов А.Г., Самойленко Н.И., Пальченко Л.А, Рябченко И.Н.* Минимизация функций с применением микро- и мини-ЭВМ. Сборник задач и упражнений. – Харьков: Основа, 1993. – 256 с.
9. *Колесников А., Пробитюк А*. Excel 7.0 для Windows 95.– К.: Торгово-издательское бюро ВН, 1996. – 464 с.
10. *Корбут А.А.,.Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. – М.: Наука, 1969. – 368 с.
11. *Крушевский А.В., Швецов К.И.* Математическое программирование и моделирование в экономике. – К.: Вища школа, 1979.
12. Кудрявцев Е.М. MathCAD 2000. - М.: ДМК Пресс, 2001. – 576 с.
13. *Самойленко М.І.* Курс лекцій з математичного програмування.– Харків: ХДАМГ, 1997. – 103 с.
14. *Самойленко М.*І. Математичне програмування. – Харків: Основа, 2002. – 424 с.
15. *Сивый В.Е., Скоков Б.Г.* Математические методы и модели в планировании и управлении жилищно-коммунальным хозяйством. - Харьков: Основа, 1991. – 208 с
16. Справочник по математике для экономистов / Под ред. *В.И.Ермакова*. – М.: Высш. шк., 1987. – 336 с.
17. *Терехов Л.Л.* Экономико-математические методы и модели. - М.: Статистика, 1972.
18. *Терехов Л.Л. и др*. Экономико-математические методы и модели. в планировании и управлении. - К.: Вища школа, 1984.

Зміст

Передмова 3
Вступ 5
Загальна характеристика дисципліни 5
Сучасні інформаційні технології в дослідженні операцій. . . 6

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ 7

Розділ 1. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ 13
Тема 1.1. Економічні передумови постановки і вирішення задач математичного програмування. 13
Тема 1.2. Загальна характеристика задач математичного програмування 15
Тема 1.3. Транспортна задача. Математичне формулювання і алгоритм вирішення 21
1.3.1. Змістовна постановка задачі 21
1.3.2. Математична модель задачі 21
1.3.3. Особливості вирішення закритої транспортної задачі . . 24
1.3.4. Визначення початкового опорного плану транспортної задачі 25
1.3.5. Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі 28
1.3.6. Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів. 31
Тема 1.4. Інформаційні технології вирішення задач математичного програмування 39
1.4.1. Вибір інформаційної технології вирішення задач математичного програмування 39
1.4.2. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel 40
1.4.3. Приклад вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel 42
1.4.4. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи MathCAD 2000 45
Тема 1.5. Різновиди транспортних задач 49

1.5.1. Цілочислова транспортна задача 49
1.5.2. Транспортна задача про розподіл випуску продукції . . . 50
1.5.3. Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу 51
1.5.4. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу . 52
1.5.5. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів 54
1.5.6. Транспортне задачі про двохетапне перевезення вантажу декількох видів за запитами споживачів 56
1.5.7. Транспортна задача про закриття підприємства 57
Тема 1.6. Задача цілочислового лінійного програмування . . . 58
1.6.1. Задача про розподіл вантажного флоту 50
1.6.2. Задача про розвезення вантажу 61
Індивідуальні завдання до розділу 1. 64
Завдання №1 65
Завдання №2 66
Розділ 2. ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ . 68
Тема 2.1. Загальні поняття теорії масового обслуговування . . 68
Тема 2.2. Основні поняття, термінологія і класифікація систем масового обслуговування 70
Тема 2.3. Математико-статистична обробка виробничих даних. 76
Тема 2.4. Показники ефективності систем масового обслуговування 86
2.4.1. Технічні показники ефективності систем масового обслуговування. 86
2.4.2. Економічні показники ефективності систем масового обслуговування 88
Тема 2.5. Ланцюги Маркова і рівняння Колмогорова для систем масового обслуговування 89
2.5.1. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з необмеженим часом очікування 90
2.5.2. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з необмеженим часом очікування 91

2.5.3. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженим часом очікування 91
2.5.4. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з обмеженим часом очікування. 92
2.5.5. Розімкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги 92
2.5.6. Розімкнута багатоканальна система масового обслуговування з обмеженої довгої черги 93
2.5.7. Замкнута одноканальна система масового обслуговування з обмеженим потоком вимог 93
2.5.8. Замкнута багатоканальная система масового обслуговування з обмеженим потоком вимог 94
2.5.9. Одноканальна система масового обслуговування з відмовами 95
2.5.10. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами 95
2.5.11. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів 95
Тема 2.6. Розімкнуті системи масового обслуговування 97
2.6.1. Розімкнута система масового обслуговування з необмеженим часом очікування 97
2.6.2. Комп'ютерне обчислення показників розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування 106
2.6.3. Розімкнута система масового обслуговування з обмеженим часом чекання 110
2.6.4. Розімкнута система масового обслуговування з обмеженою довжиною черги 114
Тема 2.7 Замкнуті системи масового обслуговування 118
2.7.1. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в сталому режимі 118
2.7.2. Комп'ютерний розрахунок показників одноканальної замкнутої системи масового обслуговування 123
2.7.3. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи MathCAD 2000 127

2.7.4. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в сталому режимі 132
2.7.5. Комп'ютерне обчислення показників багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування 139
2.7.6. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи MathCAD 2000 143
Тема 2.8. Системи масового обслуговування з відмовами . . . 147
2.8.1. Одноканальна система масового обслуговування з відмовами. 147
2.8.2. Багатоканальна система масового обслуговування з відмовами 150

2.8.3 Комп'ютерний розрахунок показників багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами 154
2.8.4. Дослідження математичних моделей багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами за допомогою інформаційної системи Microsoft Excel 156
Індивідуальні завдання до розділу 2 159
Завдання №1 159
Завдання №2 160
Завдання №3 161
Запитання для контролю знань 163
ДОДАТКИ 169
Додаток А. Зразок титульної сторінки для звітів про контрольні роботи 169
Додаток Б. Довідкові дані до розрахунку показників ефективності систем масового обслуговування . . 170
Список літератури 171

Навчальне видання

САМОЙЛЕНКО Микола Іванович,
СКОКОВ Борис Григорович

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Математичне програмування. Теорія масового обслуговування

Навчальний посібник

Редактор *М.З.Аляб'єв*
Художник обкладинки *М.І.Самойленко*
Комп'ютерна верстка *М.І.Самойленко*

План 2005, поз.383.

Підп. до друку 28.10.2004. Формат 60×84/16.
Папір офісний. Друк на ризографі. Умовн.-друк.арк. 9,8 .
Обл.-вид. арк 11,0. Тираж 500 прим. Зам. № .

61002 Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12.

Сектор оперативної поліграфії ІОЦ ХНАМГ.
Харків, вул. Революції, 12.