Задачи многокритериальной оптимизации

В практической деятельности часто встречаются задачи, заключающиеся в поиске лучшего (оптимального) решения при наличии различных несводимых друг к другу критериев оптимальности. Например, принятие решения о строительстве дороги в объезд города должно учитывать такие факторы, как выигрыш города в целом по соображениям экологии, проигрыш отдельных предприятий и фирм, например, из-за уменьшения проезжающих через город потенциальных покупателей и многие другие. Если такого рода задачи решаются методами математического программирования, то говорят о задачах ***многокритериальной оптимизации.*** Эти задачи могут носить как линейный, так и нелинейный характер. Поскольку методы решения таких задач излагаются ниже на примере линейных многокритериальных оптимизационных задач, это объясняет рассмотрение этой темы в данной главе учебного пособия.

Задачи многокритериальной оптимизации возникают в тех случаях, когда имеется несколько целей, которые не могут быть отражены одним критерием (например, стоимость и надежность). Требуется найти точку области допустимых решений, которая минимизирует или максимизирует все такие критерии. Если в подобного рода задачах речь идет не о разнородных критериях некоторой системы, а о сопоставлении однородных критериев разных ее подсистем (например, отрасли, группы населения и т.п.), то эти ***задачи называются задачами векторной оптимизации.***

Обозначим 1-й частный критерий через $Z_i(\bar{X})$, где $\bar{X}$- допустимое решение, а область допустимых решений - через ***Q.*** Если учесть, что изменением знака функции всегда можно свести задачу минимизации к задаче максимизации, то кратко задачу многокритериальной оптимизации можно сформулировать следующим образом:

$Z(\bar{X})=\langle Z_1(\bar{X}), Z_2(\bar{X}), \dots, Z_m(\bar{X})\rangle \to \max$(3.28)

$\bar{X} \in Q$.(3.29)

Некоторые частные критерии могут противоречить друг другу, другие действуют в одном направлении, третьи - индифферентны, безразличны друг к другу. Поэтому процесс решения многокритериальных задач неизбежно связан с экспертными оценками как самих критериев, так и взаимоотношений между ними. Известен ряд методов решения задач многокритериальной оптимизации:

- оптимизация одного признанного наиболее важным критерия, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;

- упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них (этот подход рассмотрен ниже на примере ***метода последовательных уступок;***

- сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес.

Возвращаясь к задаче многокритериальной оптимизации в общей постановке (3.28), (3.29), отмстим, что в идеальном случае можно вести поиск такого решения, которое принадлежит пересечению множеств оптимальных решений всех однокритериальных задач. Однако такое пересечение обычно оказывается пустым множеством, поэтому приходится рассматривать так называемое переговорное множество ***эффективных решений (оптимальных по Парето).*** Критерий оптимальности итальянского экономиста В. Парето применяется при решении таких задач, когда оптимизация означает улучшение одних показателей при условии, чтобы другие не ухудшались.

Определение 3.1. Вектор $\bar{X}^* \in Q$ называется эффективным (оптимальным по Парето) решением задачи (3.28), (3.29), если не существует такого вектора $\bar{X} \in Q$, что

$Z_i(\bar{X}) \geq Z_i(\bar{X}^*), \quad i = \overline{1,m},$ (3.30)

причем хотя бы для одного значения ***i*** имеет место строгое неравенство.

Множество допустимых решений, для которых невозможно одновременно улучшить все частные показатели эффективности (т.е. улучшить хотя бы один из них, не ухудшая остальных), принято называть ***областью Парето,*** или ***областью компромиссов,*** а принадлежащие ей решения - ***эффективными,*** или ***оптимальными по Парето.***

В общем случае эффективные решения не эквивалентны друг другу, так что про два оптимальных по Парето решения нельзя сказать, какое из них лучше. Поэтому при решении многокритериальных задач необходимо дополнительное изучение эффективных решений. Для этого можно было бы сформулировать некоторый критерий и оптимизировать его на множестве эффективных решений. Однако при этом возникают значительные трудности в связи с тем, что, как правило, область компромиссов не является выпуклой, и полученная задача в общем случае будет задачей невыпуклого программирования. Обычный подход заключается в стремлении "свернуть" частные критерии в один обобщенный скалярный критерий, оптимизация которого приводит к оптимальному решению задачи в целом. Формулировка подходящего обобщенного критерия в зависимости от конкретных условий как раз и является основным вопросом, который изучается в многокритериальной оптимизации.

В некоторых случаях вместо одного обобщенного критерия и решения одной соответствующей задачи скалярной оптимизации предлагается рассматривать последовательность обобщенных критериев и последовательность задач скалярной оптимизации. К сожалению, многие из описанных в литературе подобных процедур не всегда приводят к эффективным решениям.

Рассмотрим один из таких методов решения многокритериальных задач - ***метод последовательных уступок.***

Метод последовательных уступок решения задач многокритериальной оптимизации применяется в случае, когда частные критерии могут быть упорядочены в порядке убывания их важности. Предположим, что все частные критерии максимизируются и пронумерованы в порядке убывания их важности. Находим максимальное значение Z_1^*, первого по важности критерия в области допустимых решений, путем решения однокритериальной задачи

$$\begin{aligned}&Z_1(\overline{X}) \to \max,\\&\overline{X} \in Q.\end{aligned}$$

Затем, исходя из практических соображений и принятой точности, назначается величина допустимого отклонения 8, > 0 (экономически оправданной уступки) критерия Z, и находится максимальное значение второго критерия $\boldsymbol{Z'_2}$ при условии, что значение первого критерия не должно отклоняться от своего максимального значения более чем на величину допустимой уступки, т.е. решается задача:

$$\begin{aligned}&Z_2(\overline{X}) \to \max,\\&Z_1(\overline{X}) \ge Z_1^* - \delta_1,\\&\overline{X} \in Q.\end{aligned}$$

Снова назначается величина уступки $\delta_2 > 0$ по второму критерию, которая вместе с первой уступкой используется для нахождения условного максимума третьего частого критерия:

$$\begin{aligned}&Z_3(\overline{X}) \to \max,\\&Z_1(\overline{X}) \ge Z_1^* - \delta_1,\\&Z_2(\overline{X}) \ge Z_2^* - \delta_2,\\&\overline{X} \in Q.\end{aligned}$$

Аналогичные процедуры повторяются до тех пор, пока не будет выявлено максимальное значение последнего по важности критерия $\boldsymbol{Z_m}$ при условии, что значение каждого из первых $\boldsymbol{m}$ - 1 частных критериев отличается от соответствующего условного максимума не более чем на величину допустимой уступки по данному критерию. Полученное на последнем этапе решение считается оптимальным. Следует заметить, что этот метод не всегда приводит к эффективному решению.

Пример 3.7. Решение задачи многокритериальной оптимизации методом последовательных уступок.

Решение. Пусть задача трехкритериальной оптимизации имеет вид

$Z_1 = x_1 \quad 2x_2 \to \max$ (3.31)

$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$ (3.32)

$Z_1 = x_1 \quad 3x_2 \to \max$ (3.33)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{array}\right\} \quad (3.34)$$

Заметим, что так как коэффициенты при одних и тех же переменных в данных частных критериях имеют разные знаки, то в заданной области допустимых решений невозможно одновременно улучшить все частные критерии, т.е. в рассматриваемом случае область компромиссов (область Парето) совпадает с областью допустимых решений (3.34).

Для определенности будем считать, что допустимые уступки по первым двум критериям заданы: $\delta_1 = 3$; $\delta_3 = 5/3$.

Максимизируем функцию Z_3 в области допустимых решений, т.е. решаем одну критериальную задачу (3.31), (3.34). Это несложно сделать рассмотренным в главе 2 графическим методом решения задач линейного программирования (рис. 3.3).

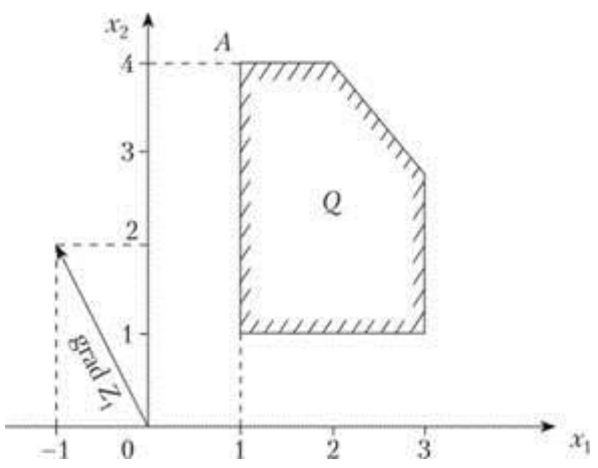

Рис. 3.3

Максимум функции Z_1 при условиях (3.34) достигается в точке ***A*** области ***Q*** с координатами (1; 4), так что в данном случае

$$x_1^* = 1;\quad x_2^* \quad 4; = \max Z_1 \quad Z_1^* \quad Z_1(A) \quad 7$$

Переходим к максимизации функции Z, при условиях (3.34) и дополнительном ограничении, позволяющем учесть, что по критерию Z, нельзя уступать более чем на δ_1. Так как в нашем примере $Z_1^* - \delta_1 = 4$, то дополнительное ограничение будет иметь вид

$-x_1 + 2x_2 \geq 4$.(3.35)

Задачу (3.32), (3.34), (3.35) также решаем графически (рис. 3.4).

Получаем, что максимум функции Z_2 при условиях (3.34), (3.35) достигается в точке ***B*** части Q, области Q, так что

$$x_1^{**} = 8/3;\quad x_2^{**} \quad 10/3;\quad \max Z_2 = Z_2^* \quad Z_2(B) \quad 26/3$$

Теперь уступаем по критерию Z_2 на величину уступки 5_2= 5/3 и получаем второе дополнительное ограничение:

$2x_1 + x_2 \geq 7$.(3.36)

Максимизируем функцию Z_3 при условиях (3.34), (3.35) и (3.36). Решение этой задачи представлено на рис 3.5.

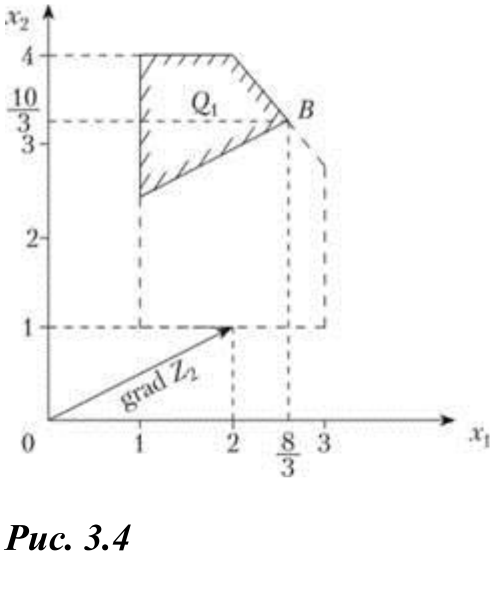

Рис. 3.4

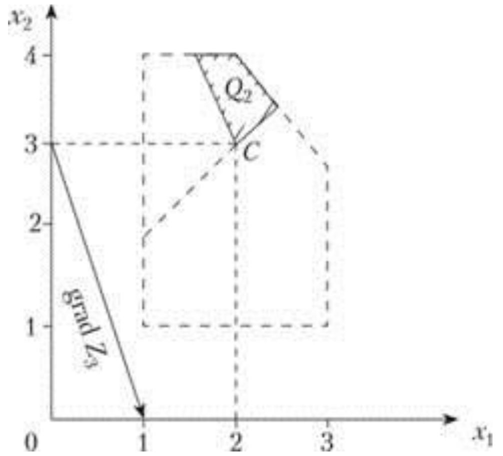

Рис. 3.5

Таким образом, получаем оптимальное решение рассматриваемой трехкритериальной задачи (точка ***C*** на рис. 3.5):

$x_1 = 2$; $\boldsymbol{x_2} = 3$.

Соответствующие значения частных критериев при этом составляют:

$Z_1 = 4$; $Z_2 = 7$; $Z_3 = -7$.