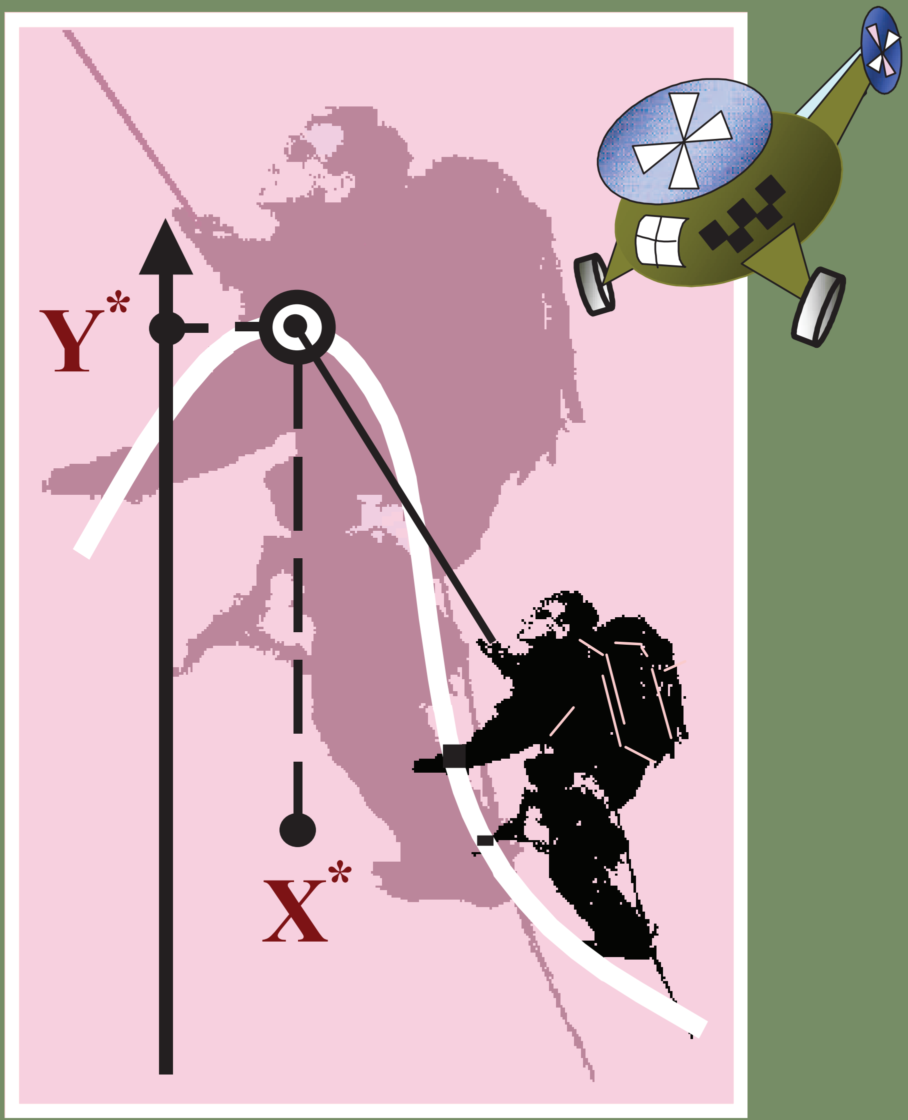
М.І.Самойленко, Б.Г.Скоков,



ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

М.І. Самойленко, Б.Г.Скоков

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів спеціальностей ”Бухгалтерський облік і аудит”, “Менеджмент організацій”

Харків – ХНАМГ – 2005

ББК 22.18
УДК 519.47

Самойленко М.І., Скоков Б.Г.
С17 Дослідження операцій (Математичне програмування. Теорія масового обслуговування): Навч. посібник. – Харків: ХНАМГ, 2005. – 176 с.

Посібник знайомить з основними поняттями і методами досліджень операцій. Наведені методи ілюструються типовими прикладами. Велику увагу приділено використанню сучасних інформаційних технологій для вирішення прикладних задач дослідження операцій.

Призначений для студентів вищих навчальних закладів спеціальностей 8.0501 06 "Бухгалтерський облік і аудит" і 8.0502 01 "Менеджмент організацій".

Табл. – 21. Іл. – 34. Бібліогр. – 18 назв.

Рецензенти:

директор Інституту комп'ютерних і інформаційних технологій Харківського національного університету радіоелектроніки, д-р техн. наук, проф. *В.М.Левикін*;

зав. кафедри вищої математики Харківської національної академії міського господарства, д-р техн. наук, проф. *А.І.Колосов*

Гриф надано Міністерством освіти і науки України, рішення № 1/11-6486 від 17.12.04

ISBN 966-695-060-X

Передмова

Цей навчальний посібник призначений для студентів денної і заочної форм навчання, які прослухали курси «Вища математика» і «Основи інформатики» і далі проходять підготовку за спеціальностями 8.0501 06 “Бухгалтерський облік і аудит”, 8.0502 01 “Менеджмент організацій”.

Мета посібника – забезпечити студентів навчальним і практичним матеріалом для самостійного вивчення дисципліни «Дослідження операцій» і використання методів дисципліни для моделювання та вирішення прикладних задач організації, планування і управління виробництвом із залученням сучасних інформаційних технологій.

Дисципліна «Дослідження операцій» сприяє подальшому підвищенню рівня фундаментальної математичної і комп'ютерної підготовки студентів.

Внаслідок вивчення теоретичного курсу, проведення практичних і лабораторних занять, виконання індивідуальних завдань і контрольних робіт студенти повинні:

освоїти методику математико-статистичної обробки виробничої інформації при вирішенні конкретних задач організації, планування і управління;

навчитися використовувати методи математичного програмування і теорії масового обслуговування для вирішення виробничих і планово-економічних задач;

придбати практичні навички по вибору і використанню сучасних інформаційних технологій для вирішення задач теорії дослідження операцій;

засвоїти методи і прийоми дослідження математичних моделей систем масового обслуговування за допомогою сучасних інформаційних технологій.

Особливостями навчального посібника є: спрямованість курсу на підготовку фахівців у галузі економіки, підприємництва та менеджменту; комп'ютерний ухил при виконанні рутинних обчислювальних процедур пошуку рішення в задачах дослідження операцій; індивідуалізація навчання і можливість самостійного вивчення курсу. З цією метою по кожній темі курсу в посібник включені задачі економічного характеру з докладним викладом технології їх вирішення засобами сучасної комп'ютерної техніки.

Для забезпечення можливості самостійного вивчення курсу посібник містить приклади вирішення типових задач за кожною темою, набори задач для самостійного розв’язання з відповідями і контрольні запитання для самоперевірки.

Наведені наприкінці книги додатки містять довідкові відомості, необхідні для виконання індивідуальних завдань.

В основу посібника покладено курс лекцій з дослідження операцій і інформаційних технологій, що викладаються нами у вищих навчальних закладах.

Висловлюємо щиру подяку рецензентам за їхню копітку працю з резензування навчального посібника й істотні зауваження, що сприяли поліпшенню змісту книги і методики її викладення.

Автори

ВСТУП

Загальна характеристика дисципліни

Для забезпечення якісного зростання суспільного виробництва і досягнення найвищої продуктивності праці необхідно перебудувати відповідно до сучасних методів управління господарський механізм. Перехід до ринкових відносин розширив права підприємств та їхню самостійність. Удосконалюються організація, нормування і стимулювання праці, на цій основі підвищуються відповідальність і зацікавленість трудових колективів у кінцевих результатах роботи.

Курс "Дослідження операцій" є одним з основних для студентів, які навчаються за спеціальностями економіки та менеджменту. Він складається з двох розділів, що охоплюють найважливіші математичні методи вирішення задач організації, планування і управління.

На лекціях студенти знайомляться з:

методами і прийомами математико-статистичного моделювання техніко-економічних показників на основі якісного і кількісного дослідження умов виробництва, професійної майстерності працівників, рівня організації праці і техніки та інших чинників;

принципами складання математичних моделей конкретних задач теорії дослідження операцій на основі поставлених цілей, необхідних умов і вимог їх досягнення;

математичними методами вирішення задач теорії дослідження операцій, що мають місце в економіці й менеджменті;

аналізом математичних моделей прикладних задач економіки і менеджменту з наступним вибором інформаційної технології комп'ютерного варіанта їхнього вирішення.

У результаті вивчення теоретичних основ курсу студенти повинні знати:

основні положення і методичні принципи математико-статистичного моделювання виробничих процесів і техніко-економічних показників;

методику попередньої обробки результатів експериментальних досліджень, хронометражних даних та іншої виробничої інформації при вирішенні конкретних задач організації, планування та управління;

класифікацію задач дослідження операцій залежно від кількості, типу й області припустимих значень змінних, кількості й типу цільових функцій, кількості, виду й характеру чинників, що обмежують;

математичні методи вирішення типових задач теорії дослідження операцій;

існуючі інформаційні технології ефективного вирішення прикладних задач теорії дослідження операцій.

Внаслідок проведення практичних і лабораторних занять, а також виконання індивідуальних контрольних завдань, передбачених програмою курсу, студенти повинні вміти:

попередньо обробляти виробничу інформацію при вирішенні конкретних задач;

формулювати і перевіряти статистичні гіпотези;

складати і класифікувати математичні моделі задач відповідно до їх типу;

вибирати математичний метод і інформаційну технологію для вирішення конкретної прикладної задачі теорії дослідження операцій;

визначати тип задачі масового обслуговування і необхідну для її вирішення виробничу інформацію.

Сучасні інформаційні технології в дослідженні операцій

Процедури вирішення задач дослідження операцій припускають виконання великого обсягу обчислювальної роботи. Багато процедур мають циклічний характер. Рутинна робота з пошуку рішення вимагає великих затрат сил і часу і може служити причиною виникнення помилок. Щоб уникнути появи помилкових результатів обчислювального характеру, властивих людині, і на декілька порядків скоротити час вирішення, необхідно процедури вирішення задач дослідження операцій здійснювати за допомогою сучасної комп'ютерної техніки.

У даному курсі використовується ряд інформаційних технологій, що зарекомендували себе як найбільш вдалі програмно-інструментальні засоби для розв’язання різних задач теорії дослідження операцій. Вибір тій або іншій технології для вирішення конкретної задачі визначається у першу чергу здатністю обраної технології справитися з цим завданням. Не менше важливою умовою для вибору є доступність програмного засобу. Через зазначені причини для навчальних цілей використовуються професійні програмні засоби, що одержали поширення у всьому світі, а саме:

для вирішення екстремальних задач з дискретною математичною моделлю і розрахунку показників функціонування систем масового обслуговування в сталому режимі роботи використовується офісний пакет *Microsoft Office* версії 7.0 або вище;

для вирішення екстремальних задач з безперервною математичною моделлю і розрахунку показників функціонування систем масового обслуговування в несталому режимі роботи використовується професійний математичний пакет *MathCAD 2000*.

Особливості використання перерахованих інформаційних технологій для вирішення задач, що складають предмет курсу, детально розглядаються у відповідних підрозділах посібника.

РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ

Предмет, мета і завдання курсу

Предмет курсу – виробничі й планово-економічні задачі з раціонального використання трудових, матеріальних і фінансових ресурсів, традиційні методи і прийоми їх вирішення, комп'ютерні технології розв’язання задач теорії дослідження операцій.

Мета курсу – систематичне вивчення методів економіко-математичного моделювання виробничих процесів і їхнього практичного застосування для вирішення задач організації, планування і управління виробництвом.

Задачі курсу. результаті вивчення теоретичного курсу, виконання практичних і лабораторних завдань студенти повинні:

освоїти методику математико-статистичної обробки виробничої інформації при вирішенні конкретних задач з організації, планування та управління виробництвом;

опанувати методами математичного програмування і теорії масового обслуговування;

навчитися вибирати і використовувати сучасні комп'ютерні технології для вирішення задач дослідження операцій.

РОЗДІЛ 1
МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 1.1. Економічні передумови постановки і вирішення задач математичного програмування

Розвиток чисельних методів вирішення планово-економічних і виробничих задач. Основні економічні передумови постановки та вирішення задач методами математичного програмування: органічне сполучення централізованого народногосподарського планування з розширенням самостійності підприємств, багатоваріантність використання обмежених ресурсів і виробничих потужностей, можливість одержання необхідної і достовірної інформації, широке використання ЕОМ, достатня теоретична розробка методів економіко-математичного моделювання.

Тема 1.2. Загальна характеристика задач математичного програмування

Сутність оптимального вирішення задачі досягнення заданого результату при мінімальній витраті ресурсів або досягнення максимального ефекту при обмежених ресурсах. Критерії оцінки прийнятих рішень, етапи вирішення екстремальних задач. Припустимі й оптимальні рішення.

Класифікація задач математичного програмування та методів їх вирішення. Лінійне і нелінійне програмування. Алгоритми вирішення екстремальних задач і їхні відмінні риси. Поняття про стохастичне, цілочислове та динамічне програмування. Приклади виробничих задач.

Тема 1.3. Транспортна задача. Математичне формулювання та алгоритм вирішення

Змістовна постановка задачі. Математична модель задачі. Теорема про можливість розв'язання транспортної задачі. Особливості вирішення закритої транспортної задачі. Визначення початкового опорного плану транспортної задачі. Метод північно-західного кута. Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі. Умови оптимальності. Поняття циклу і потенціалів у транспортній задачі. Метод потенціалів. Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів на конкретному прикладі.

Тема 1.4. Інформаційні технології вирішення задач математичного програмування

Вибір інформаційної технології вирішення задач математичного програмування. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*. Вбудована програма *Solver*. Представлення вихідних, проміжних і вихідних даних для вирішення транспортної задачі в інформаційній системі *Microsoft Excel*. Приклад вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*. Технологія вирішення транспортної задачі за допомогою інформаційної системи *MathCAD 2000*.

Тема 1.5. Різновиди транспортної задачі

Цілочислова транспортна задача. Транспортна задача про розподіл випуску продукції. Розподільна транспортна задача про вибір засобів доставки вантажу. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів. Транспортна задача про двохетапне перевезення вантажу декількох видів за замовленням споживача. Транспортна задача про закриття підприємства.

Тема 1.6. Задача цілочислового лінійного програмування

Особливості вирішення задачі цілочислового лінійного програмування. Змістовна постановка, математична модель і приклад транспортної задачі про розміщення вантажного флоту. Змістовна постановка, математична модель і приклад транспортної задачі про розвезення вантажу.

РОЗДІЛ 2
ТЕОРІЯ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Тема 2.1. Поняття про системи масового обслуговування та загальна характеристика задач

Теорія масового обслуговування як самостійна наукова дисципліна. Історія розвитку теорії масового обслуговування. Роль теорії масового обслуговування у вирішенні задач підвищення ефективності організації і функціонування виробництва. Особливості задач теорії масового обслуговування. Прикладне значення теорії масового обслуговування. Приклади задач масового обслуговування в житлово-комунальному господарстві.

Тема 2.2. Основні поняття, термінологія і класифікація систем масового обслуговування

Поняття системи масового обслуговування. Складові елементи систем масового обслуговування. Вхідний і вихідний потоки вимог, що обслуговують канали (апарати, пристрої), черга на обслуговування. Різновиди систем масового обслуговування та їх класифікація. Одно- і багатоканальна системи, замкнуті й розімкнуті системи, впорядковані й неупорядковані системи, системи з відмовами та очікуванням, системи з обмеженою і необмеженою довжиною черги. Критерії оцінки якості функціонування систем масового обслуговування.

Тема 2.3. Математико-статистична обробка виробничих даних

Поняття про найпростіший потік вимог. Пуасонівський закон розподілу потоку вимог. Властивості найпростішого потоку вимог: стаціонарність, ординарність і відсутність післядії. Можливість вирішення задач масового обслуговування при недотриманості до властивостей найпростішого потоку вимог. Час між надходженнями вимог, час обслуговування і дослідження законів їх розподілу. Побудова статистичного ряду випадкової величини. Кількісна і якісна оцінка ступеня відповідності теоретичної кривої розподілу до даних експерименту.

Тема 2.4. Показники ефективності систем масового обслуговування

Технічні показники ефективності систем масового обслуговування. Імовірність відмови в обслуговуванні. Середня кількість вимог, що очікують обслуговування. Відносна й абсолютна пропускні спроможності системи. Середнє число каналів, зайнятих обслуговуванням. Загальна кількість вимог, що знаходяться в системі. Середній час очікування вимогами початку обслуговування. Економічні показники ефективності систем масового обслуговування.

Тема 2.5. Ланцюги Маркова і рівняння Колмогорова для систем масового обслуговування

Графічна інтепретація математичних моделей систем масового обслуговування. Марковські ланцюги для найбільш поширених систем масового обслуговування. Рівняння Колмогорова для імовірностей станів системи масового обслуговування. Поняття щільності імовірності переходу з одного стану в інший. Системи рівнянь Колмогорова для несталих і сталих потоків вимог.

Тема 2.6. Розімкнуті системи масового обслуговування

Особливості розімкнутих систем масового обслуговування з необмеженим часом очікування. Умова функціонування системи. Вихідні параметри системи для розрахунку показників системи. Розрахунок показників функціонування системи. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Імовірність появи черги. Середня довжина черги. Середній час очікування обслуговування. Середнє число вільних каналів. Коефіцієнт простою каналу. Приклади вирішення виробничих задач розрахунку показників функціонування системи масового обслуговування . Техніко-економічне обґрунтування ефективності збільшення продуктивності обслуговуючої системи. Комп'ютерний розрахунок показників розімкнутої системи масового обслуговування з необмеженим часом очікування. Особливості розімкнутої системи масового обслуговування з *обмеженим* часом очікування. Розрахунок показників функціонування системи з обмеженим часом очікування. Приклад розрахунку. Особливості розімкнутої системи масового обслуговування з *обмеженою довжиною черги.* Розрахунок показників функціонування системи з обмеженою довжиною черги. Приклад розрахунку.

Тема 2.7. Замкнуті системи масового обслуговування

Особливості одноканальних замкнутих систем масового обслуговування. Вихідні параметри для розрахунку показників системи. Розрахунок показників функціонування системи. Відношення інтенсивності вхідного потоку вимог до вихідного. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Коефіцієнт простою каналу. Імовірність зайнятості каналу обслуговування. Математичне очікування числа вимог, що знаходяться в системі. Коефіцієнта простою об'єкта. Середня довжина черги. Коефіцієнт простою об'єктів в очікуванні обслуговування. Середній час очікуванні обслуговування. Приклади розрахунку. Комп'ютерний розрахунок показників функціонування одноканальної замкнутої системи масового обслуговування. Одноканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі та комп'ютерні технології розрахунку параметрів функціонування за допомогою системи *MathCAD 2000*. Аналіз результатів розрахунку. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в сталому режимі. Комп'ютерний розрахунок показників функціонування багатоканальної замкнутої системи масового обслуговування в сталому режимі. Багатоканальна замкнута система масового обслуговування в несталому режимі і розрахунок її параметрів за допомогою системи *MathCAD 2000*. Аналіз результатів розрахунку.

Тема 2.8. Системи масового обслуговування з відмовами

Особливості одноканальної системи масового обслуговування з відмовами й основні показники її функціонування. Розрахунок показників. Коефіцієнт завантаження. Імовірності одночасного перебування в системі декількох вимог. Імовірність відсутності вимог у системі. Коефіцієнт простою каналу. Абсолютна продуктивність системи. Імовірність відмови в обслуговуванні. Приклади розрахунку показників. Особливості багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами. Традиційні і комп'ютерні технології розрахунку показників багатоканальної системи масового обслуговування з відмовами. Дослідження математичних моделей багатоканальних систем масового обслуговування з відмовами за допомогою інформаційної системи *Microsoft Excel*.

Розділ 1. МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Тема 1.1. Економічні передумови постановки і вирішення задач математичного програмування

На якому рівні не знаходилося суспільне виробництво, які великі не були трудові, матеріальні й фінансові ресурси, перед господарськими керівниками завжди стоїть завдання найкращого використання виробничих ресурсів і потужностей.

Окремим галузям народного господарства, виробничим об'єднанням, підприємствам і їхнім структурним підрозділам надана можливість самостійно вирішувати питання раціонального використання виділених ресурсів для досягнення своїх виробничих цілей. У межах установлених нормативів, лімітів і прав виробничі об'єднання і підприємства можуть маневрувати наявними ресурсами, приймати важливі економічні й виробничі рішення, від яких залежить використання устаткування, продуктивність праці, собівартість і якість продукції, а також всі інші показники виробничо-господарської діяльності.

Уперше подібна задача у вигляді пропозиції щодо укладання національного плану перевезень, що дозволяє мінімізувати сумарний кілометраж, подана в роботі радянського економіста Л.М.Толстого (1930 р.). Екстремальна задача з мінімізації транспортних витрат була ним сформульована в 1939 р.

Одну з різновидів транспортної задачі в 1941 р. поставив американець Хічкок (проблема Хічкока). Але закінченого методу вирішення цієї задачі він не розробив.

У загальному вигляді задача математичного програмування сформульована в 1939 р. Л.В.Канторовичем. Він же запропонував метод множників, що дозволяє її вирішувати. Разом із М.К.Гавуриним у 1949 р. Л.В.Канторович розробив метод потенціалів, який і дотепер є найбільш поширеним методом вирішення транспортних задач.

Широко відомий метод вирішення задачі лінійного програмування – симплексний метод – був опублікований Д.Б.Данцигом у 1949 р. Вдалою модифікацією симплексного методу є диференціальний алгоритм, що логічно випливає з диференціального алгоритму вирішення загальної задачі математичного програмування. Цей метод протягом останніх десятиліть (з 1978 р.) успішно викладається професорами А.Г.Евдокимовим і М.І.Самойленко в Харківській національній академії міського господарства.

Застосування математичних методів в економіці на першому етапі ознаменувалося досить гострою дискусією економістів "традиційної" школи та економістів нового покоління. Однак тепер мало залишилося економістів, які б прямо заперечували проти необхідності використання ефективних математичних методів при вирішенні таких важливих проблем, як:

ціноутворення;

дослідження міжгалузевих зв'язків;

підвищення ефективності капітальних вкладень;

використання обмежених ресурсів;

розміщення продуктивних сил;

обґрунтування нормативів на витрати матеріалів і оборотних коштів та багато інших, не менш важливих, задач економіки та менеджменту.

Зважаючи на те, що гігантський господарський механізм України виробляє більш 15 *млн.* найменувань різної продукції, стає очевидним утопічність всебічної багатокритеріальної оптимізації народногосподарського плану. Управляти такою масою господарських підрозділів можна тільки за допомогою багаторівневої структури управління: центральні органи, галузеві, виробничо-територіальні об'єднання та окремі підприємства.

З вищевказаних причин на рівні народного господарства переважно використовуються неформальні методи оптимального планування із залученням для вирішення часткових питань економіко-математичних методів і електронно-обчислювальної техніки.

Основними економічними передумовами постановки і вирішення задач методами математичного програмування слід вважати:

органічне сполучення централізованого народногосподарського планування із самостійністю підприємств, виробничих об'єднань і галузей економіки;

наявність декількох або багатьох можливих (альтернативних припустимих, але не рівнозначних) варіантів використання обмежених ресурсів і виробничих потужностей;

широке використання економіко-математичних методів у сполученні із сучасними засобами електронно-обчислювальної техніки;

можливість одержання необхідної і достовірної виробничо-економічної інформації;

достатньо повна теоретична розробка методів вирішення задач математичного програмування.

Тема 1.2. Загальна характеристика задач математичного програмування

Математичне програмування як прикладний розділ вищої математики відіграє винятково важливу роль у підготовці фахівців економічного профілю. Використання математичних методів в інженерно-економічній діяльності дозволяє вирішувати оптимальним способом багато виробничих задач організації, планування і управління. Іншими словами, інженер-економіст має надійний інструмент для одержання найвищого економічного ефекту в конкретних виробничих умовах.

Вираз "*математичне програмування*" слід розуміти як ітераційний пошук найкращого варіанта використання обмежених виробничих потужностей і ресурсів для досягнення поставлених цілей.

Прикладами, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання методів математичного програмування, можуть бути наступні економічні задачі (подаються в змістовній постановці):

одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих матеріальних, трудових та інших витратах;

забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових вкладеннях або мінімальній витраті якогось виробничого ресурсу;

досягнення мінімального терміну виготовлення продукції, будівництва об'єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих або заданих виробничих ресурсах (матеріальних, трудових, енергетичних та ін.);

забезпечення мінімальної собівартості продукції при заданих виробничих ресурсах.

У наведених прикладах максимальний випуск продукції, максимальний прибуток, мінімальні фінансові вкладення, максимально короткий термін – це є шукані *оптимуми* (*максимуми* або *мінімуми*). У математиці максимум і мінімум мають ще одну назву – е*кстремум*, а задачі пошуку екстремуму називають *екстремальними задачами.*

У наведених прикладах умови, що накладаються на вирішення задачі (задані матеріальні, трудові й тимчасові витрати; планові показники; виробничі ресурси), називають *обмеженнями* задачі.

Обмеження задачі визначають *область припустимих рішень.*

Ті припустимі рішення, при яких досягається оптимум, називають *оптимальними,* або *екстремальними рішеннями.*

У загальному випадку екстремальна задача може мати одне, декілька, безліч, нескінченну безліч або жодне оптимальне рішення.

У практиці інженера-економіста оптимальне рішення прийнято називати *оптимальним планом*.

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої *математичної моделі*. У противному разі необхідно пройти досить трудомісткі й копіткі процедури математичного моделювання й ідентифікації виробничих процесів, що у даному курсі не розглядаються.

У загальному вигляді екстремальна задача формулюється наступним чином: знайти найбільше (максимальне) або найменше (мінімальне) значення деякої функції $Y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при умовах $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \;\; (i = \overline{1, m})$, де y і f_i – задані функції, а b_i – дійсне число.

Наведене формулювання є узагальненням постановок ряду часткових задач математичного програмування, що можуть розрізнятися між собою як видом функцій y і f_i (лінійні, нелінійні, стохастичні), так і характером (дискретний, неперервний) змінних .

Функцію $Y(x_1, x_2, ..., x_n)$, яку мінімізують або максимізують, називають *цільовою* функцією.

Залежно від особливостей функцій y і f_i математичне програмування можна розподілити на ряд самостійних дисциплін, що вивчають і розробляють методи вирішення окремих класів екстремальних задач. Насамперед, задачі математичного програмування розподіляються на задачі *лінійного* і *нелінійного програмування*. При цьому якщо усі функції y і f_i є лінійними, то відповідна задача відноситься до класу задач лінійного програмування. Якщо ж хоча б одна із зазначених функцій є нелінійною, то відповідна задача належить до класу задач нелінійного програмування.

Лінійне програмування є найбільш вивченим розділом математичного програмування. Для вирішення задач лінійного програмування розроблено багато ефективних методів.

Найбільш універсальним методом є диференціальний алгоритм, що логічно випливає з диференціального алгоритму загальної задачі математичного програмування. Диференціальний алгоритм, як і широко відомий симплекс-метод, дозволяє вирішувати будь-які задачі лінійного програмування. Однак для деяких класів задач лінійного програмування доцільно використовувати більш прості методи. Так, для вирішення задач із кількістю змінних, рівною двом, використовують *графічний метод*, що відзначається простотою і наочністю, але потребує графічних побудов. Для вирішення задач лінійного програмування, відомих як *транспортні*, використовують *метод потенціалів*.

Методичною основою обчислювальних процедур будь-якого методу є принцип аналізу і послідовного поліпшення деякого початкового плану розподілу і використання ресурсів. План поліпшують доти, поки не буде знайдений найкращий (оптимальний) варіант. Іншими словами, спочатку складається деякий початковий план, що аналізується за конкретними строго розробленими правилами. На підставі аналізу визначаються можливість і напрямок поліпшення початкового варіанта плану. Потім обчислюється новий план, що піддається такому ж аналізу і подальшому поліпшенню, тобто наближенню до оптимуму. Обчислювальний процес продовжується доти, поки аналіз не покаже неможливість дальшого поліпшення.

Уведення нелінійних співвідношень у систему обмежень або в цільову функцію (або в те й інше разом) обумовлює необхідність формулювання і вирішення задач методами нелінійного програмування. Поки відсутні загальні, універсальні методи вирішення такого класу екстремальних задач, оскільки нелінійність часто призводить до багатоекстремальності цільової функції.

Серед задач нелінійного програмування найбільш глибоко вивчені задачі *опуклого програмування*. Це задачі, в результаті вирішення яких визначається екстремум опуклої функції, заданої на опуклій замкнутій множині. Задача опуклого програмування має один явний екстремум.

У свою чергу, серед задач опуклого програмування більш докладно досліджені задачі *квадратичного програмування*. У результаті вирішення таких задач потрібно в загальному випадку знайти екстремум квадратичної функції при обмеженнях на змінні у вигляді системи лінійних рівнянь або лінійних нерівностей.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі *цілочислового, параметричного* і *дрібно-лінійного програмування*.

У задачах цілочислового, або *дискретного* програмування частина або всі невідомі можуть приймати тільки цілочислові значення.

У задачах параметричного програмування цільова функція або функції обмежень, що визначають область можливих змін змінних, (або і те і інше) залежать від деяких параметрів.

У задачах дрібно-лінійного програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, також є лінійними.

Особливі класи становлять задачі *стохастичного* і *динамічного програмування.*

Стохастичне програмування використовують для вирішення задач, в яких обмеження мають імовірний, випадковий характер, тобто необхідно враховувати вплив яких-небудь непередбачених обставин. Як цільова функція в задачах стохастичного програмування може служити математичне очікування деякого виробничого показника.

До задач такого типу відносяться:

комплектування ремонтних підприємств устаткуванням, коли заздалегідь невідомий обсяг робіт;

визначення необхідної кількості транспортних засобів на пасажирських маршрутах, коли обсяг перевезень має випадковий характер;

визначення запасів деяких ресурсів, коли його постачання має випадковий характер.

За допомогою лінійного, нелінійного, цілочислового і стохастичного програмування вирішуються задачі, що зводяться до відшукання оптимального рішення без урахування можливої динаміки виробничого процесу, тобто без урахування чинника часу.

У динамічному програмуванні мають місце багатоетапні задачі, що вимагають оптимізації прийнятих рішень не як одиничного акту, а з урахуванням розвитку явища, його зміни в часі.

Переваги динамічного програмування:

можливість поетапного аналізу результатів у процесі вирішення задачі, визначення оптимальної стратегії з урахуванням чинника часу;

поглиблення раніше розроблених методів кількісного і якісного дослідження природи економічних процесів;

більш об'єктивне, повне і точне вирішення планово-економічних і виробничих завдань.

Таким чином, *математичне програмування* являє собою математичну дисципліну, що досліджує екстремальні задачі і розробляє методи їх вирішення. Математичне програмування як наука знаходиться в процесі постійного розвитку. Вченими всього світу розроблено багато методів для вирішення різних класів задач математичного програмування. Разом з тим багато задач ще не мають ефективних методів вирішення і чекають своїх дослідників.

Вирішення екстремальної економічної задачі складається з наступних етапів:

побудови економіко-математичної моделі, тобто обґрунтування критерію оптимізації, виявлення і формалізації у вигляді системи рівнянь або нерівностей найбільш істотних обмежень задачі;

вибору математичного методу, що дозволяє за кінцеве число кроків одержати шукане рішення з будь-якою заздалегідь заданою точністю, або вибору відповідної комп'ютерної технології;

знаходження оптимального плану й аналізу отриманих результатів з позицій можливого їхнього практичного застосування, оскільки в економіко-математичній моделі розв'язуваного завдання враховуються тільки найбільш істотні зв'язки і залежності, а не всі, що мають місце в реальному виробництві.

З погляду економіста *оптимальним* називається такий план виробництва, що є найкращим з позицій досягнення максимального або мінімального рівня конкретного техніко-економічного критерію оцінки використання виробничого потенціалу і наявних ресурсів.

Критерієм оптимальності називається показник, за яким оцінюється міра ефективності плану. Критерій оптимальності повинен бути однозначним і мати кількісний вираз.

З усієї різноманітності задач математичного програмування в інженерній практиці економістів, фінансистів і менеджерів найбільш часто зустрічаються задачі лінійного програмування. Тому розглянемо їх більш докладно.

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: *знайти оптимум лінійної функції* $y(\mathbf{x})$*, якщо на змінні задачі накладені лінійні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.*

Аналітичний запис цього завдання має такий вигляд:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \underset{\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}} \quad , \tag{1.1}$$

$$\Omega: \quad \mathbf{A}_1\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 \le 0 \ ; \tag{1.2}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x} + \mathbf{b}_2 = 0 \ ; \tag{1.3}$$

$$\mathbf{A}_3\mathbf{x} + \mathbf{b}_3 \ge 0 \ ; \tag{1.4}$$

$$\mathbf{x} \ge 0 \ , \tag{1.5}$$

де $\mathbf{x}$ – n-мірний вектор дійсних змінних; $\mathbf{c}$ – n-мірний вектор коефіцієнтів; c_0 – вільний член у складі функції y; $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n, \quad m_2 \times n, \quad m_3 \times n$ відповідно, $m_2 < n$; $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1, \quad m_2 \times 1, \quad m_3 \times 1$ відповідно.

Часткові задачі лінійного програмування можуть не містити однієї або двох систем обмежень типу (1.2) – (1.4), все рівно яких. Крім того, замість умови невід’ємності (1.5) може мати місце двостороння або одностороння обмеженість змінних.

Задачу, складену з (1.1), (1.2) і (1.5), називають *стандартною* задачею лінійного програмування.

Канонічна, або *основна* задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$y(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + c_0 \to \underset{\mathbf{x}\in\Omega\subset\mathbf{R}^n}{\max} \quad ; \tag{1.6}$$

$$\Omega: \quad \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = 0 \ ; \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x} \ge 0, \tag{1.8}$$

де $\mathbf{A}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\mathbf{b}$ – вектори вільних членів розмірності $m \times 1$.

Очевидно, що обмеження-нерівність типу "$\le$" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід’ємної змінної, а кожне обмеження-нерівність типу "$\ge$" – в обмеження-рівність шляхом вирахуванням з його лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Задачу мінімізації лінійної функції y можна звести до задачі максимізації шляхом множення останньої на -1 . Таким чином, задачу лінійної оптимізації (1.1) – (1.5) завжди можна перетворити в задачу (1.6) – (1.8) і навпаки.

Складання математичної моделі загальної задачі математичного програмування або її канонічної форми вимагає певних зусиль і кмітливості. Але досвід складання математичних моделей швидко накопичується. Досить мати практику вирішення декількох задач, щоб надалі не мати особливих труднощів при переході від змістовної постановки задачі лінійного програмування до формальної (аналітичної).

Вирішення задачі лінійного програмування за допомогою диференціального алгоритму докладно розглядається в курсі «Математичне програмування». Незважаючи на те, що диференціальний алгоритм є універсальним, його використання не завжди виправдане. Розглянемо класи задач, що мають лінійні моделі, але вирішення яких доцільно здійснювати не за диференціальним алгоритмом. Це насамперед *транспортна задача* і задача *цілочислового лінійного програмування.*

Тема 1.3. Транспортна задача. Математичне формулювання і алгоритм вирішення

1.3.1. Змістовна постановка задачі

Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях a_1, a_2, … a_m одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний із n пунктів призначення в кількості b_1, b_2, … b_n одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} – кількість продукту, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких розмірів x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість (відстань) перевезень була б мінімальною.

1.3.2. Математична модель задачі

Позначимо:

c_{ij} – тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з i–го пункту відправлення в j–й пункт призначення;

a_j – запаси вантажу в i–му пункті відправлення;

b_i – потреба у вантажі в j–му пункті призначення;

x_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного з i–го пункту відправлення в j–й пункт призначення.

Тоді математична модель транспортної задачі про планування перевезень має такий вигляд:

$$y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x_{ij} \in \Omega} ; \tag{1.9}$$

$$\Omega : \quad f_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j , \quad j = \overline{1, n} ; \tag{1.10}$$

$$f_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \quad i = \overline{1, m} ; \tag{1.11}$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad i = \overline{1, m} . \tag{1.12}$$

Тут (1.9) – цільова функція, що визначає вартість перевезень усього вантажу. Саме екстремальне (мінімальне) значення цієї функції необхідно знайти в задачі. Причому значення змінних x_{ij}, при яких цільова функція досягає свого мінімуму, повинні належати області припустимих рішень Ω.

Вирази (1.10) – (1.12) визначають область припустимих рішень Ω. При цьому вираз (1.10) відбиває потреби у вантажі в пунктах призначення, вираз (1.11) визначає запаси вантажів у пунктах відправлення, а вираз (1.12) відокремлює негативну область значень x_{ij}, в яку дані змінні не можуть потрапляти за своїм фізичним змістом.

Вирази (1.10) – (1.12) називаються обмеженнями задачі лінійного програмування. Вирішення задачі (частковий набір значень змінних x_i) називається припустимим, якщо воно одночасно задовольняє всім обмеженням задачі. Вирішення задачі називається оптимальним, якщо воно забезпечує оптимум (у даному випадку мінімум) функції цілі.

Вважатимемо, що функції $y, f_1, f_{2,\dots} f_n$ – неперервні лінійні функції, задані на невід'ємному ортанті евклідового простору $\mathbf{R}^n$. Дані функції мають місце, коли перевезений вантаж є рідиною, сипкою речовиною, дрібними заготівлями або дрібною неспакованою продукцією. Такий вантаж характеризується параметрами, що являють собою вагу, довжину (погонні метри), площу (квадратні метри), об'єм і т.п.

Якщо загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad , \tag{1.13}$$

то модель такої транспортної задачі називається закритою. У противному випадку – відкритою.

Теорема 1.1. Для можливості розв'язання транспортної задачі необхідно і достатньо, щоб запаси вантажу в пунктах відправлення були рівні потребам у вантажі в пунктах призначення, тобто щоб виконувалася рівність (1.13).

У випадку перевищення запасу над потребою, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний ($n$+1)-й пункт призначення з потребою $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{i,n+1} = 0$ ($i = \overline{1,m}$). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (1.13) виконується.

Аналогічно, якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, уводиться фіктивний ($m$+1)-й пункт відправлення з запасом вантажу $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При цьому відповідні тарифи вважаються рівними нулю: $c_{m+1,j} = 0$ ($j = \overline{1,n}$). Така задача буде вже транспортною задачею, для якої умова (1.13) виконується.

Далі будемо розглядати закриту модель транспортної задачі. Якщо ж модель конкретної задачі є відкритою, то, виходячи зі сказаного вище, її необхідно перетворити так, щоб виконувалася рівність (1.13).

У відкритій моделі область припустимих значень (за інших рівних умов) значно ширше, тому цільова функція досягає кращих значень або, принаймні, не гірше.

1.3.3. Особливості вирішення закритої транспортної задачі

Визначення 1.1. Усяке невід'ємне рішення систем лінійних рівнянь (1.10) і (1.11) , що обумовлене матрицею **X**=$\{x_{ij}]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, називається *планом* транспортної задачі.

Визначення 1.2. План $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при якому функція (1.9) приймає своє мінімальне значення, називається *оптимальним планом* транспортної задачі.

Число перемінних x_{ij} у транспортній задачі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення дорівнює mn, а число рівнянь у системах (1.10) і (1.11) дорівнює $m+n$. Оскільки передбачається, що виконується умова (1.13), то число лінійно незалежних рівнянь дорівнює $m+n-1$. Отже, опорний план транспортної задачі може мати не більше $m+n-1$ відмінних від нуля невідомих.

Визначення 1.3. План $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ *є опорним невиродженим,* якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m+n-1$, а якщо менше – то *виродженим*.

Для визначення опорного плану існує декілька методів. Один з них – метод північно-західного кута – буде розглянутий нижче.

Як і для всякої задачі лінійного програмування, оптимальний план транспортної задачі є також опорним планом. Для визначення оптимального плану транспортної задачі можна використовувати диференціальний алгоритм, симплекс-метод та інші універсальні методи. Однак через виняткову практичну важливість цієї задачі і специфіку її обмежень (кожна невідома входить лише в два рівняння систем (1.10) і (1.11), а коефіцієнти при невідомих дорівнюють одиниці) для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблені спеціальні методи. Один з них – метод потенціалів – розглядається в даному курсі.

За звичаєм вихідні дані транспортної задачі записують у вигляді табл.1.1.

Таблиця 1.1 – Вихідні дані транспортної завдання

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення					
		1	2	…	j	…	n
		Потреби					
		b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

1.3.4. Визначення початкового опорного плану транспортної задачі

Вирішення транспортної задачі починають із знаходження якого-небудь опорного плану. Для цього розроблені специфічні методи. Один з них одержав у літературі назву "*метод північно-західного кута*". Іноді його називають також "*діагональним методом*", "*методом перехідних приступів*" і т. ін.

Сутність методу полягає в тому, що опорний план знаходять за $m+n-1$ кроками, на кожному з яких у таблиці транспортної задачі заповнюють одну клітку. Заповнення однієї клітки забезпечує цілком або задоволення потреби у вантажі одного з пунктів призначення (відповідно до того, в стовпці якого знаходиться клітка), або вивіз вантажу з одного з пунктів відправлення (відповідно з того, в рядку якого знаходиться клітка).

Заповнення таблиці слід починати з лівого верхнього квадрата (північно-західного кута). З позиції цього квадрата порівнюють запас вантажу в першому пункті відправлення з потребою першого пункту призначення. Вибирають менший розмір і записують у даний квадрат, який з цього моменту стає "*зайнятим*". Якщо в клітку записується потреба пункту призначення, то з подальшого розгляду виключають відповідний стовпець таблиці і переходять у ліву сусідню клітку. Якщо в клітку записується запас пункту відправлення, то з подальшого розгляду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню ду виключають відповідний рядок таблиці і переходять у сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої.

У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюють процедуру першого кроку з урахуванням зміни запасу вантажу одного з відправників або потреби у вантажі одного з одержувачів у результаті попереднього кроку.

Після $m+n-2$ описаних вище кроків одержують задачу з одним пунктом відправлення і одним пунктом призначення. При цьому залишається вільною тільки одна клітка, а запаси пункту відправлення дорівнюватимуть потребам пункту призначення. Заповнення цієї клітки, тобто здійснення ($m+n-1$)-го кроку приводить до шуканого опорного плану.

Алгоритм методу північно-західного кута у вигляді блок-схеми зображений на рис.2.1.

В алгоритмі визначення початкового опорного плану вихідними даними є:

m – число пунктів відправлення;

n – число пунктів призначення;

$\mathbf{a} = [a_i]$ – одномірний масив чисел, що визначають запаси вантажу в пунктах відправлення;

$\mathbf{b} = [b_j]$ – одномірний масив чисел, що визначають запаси вантажу в пунктах відправлення.

Єдиним кінцевим даним в алгоритмі є двомірний масив $\mathbf{X} = [x_{ij}]$, що безпосередньо визначає початковий опорний план транспортної задачі.

Призначення блоків схеми алгоритму:

блоки 2–5 – перевірка умови можливості розв'язання задачі: чи є математична модель транспортної задачі закритою;

блок 6 – видача повідомлення про порушення умови можливості розв'язання завдання, тобто про необхідність приведення відкритої математичної моделі до закритої;

блоки 7–9 – подвійний цикл підготовки масиву **B**;

блок 10 – надання початкових значень змінним Δa і Δb;

блок 11 – надання початкових значень індексам елементів масиву **X**;

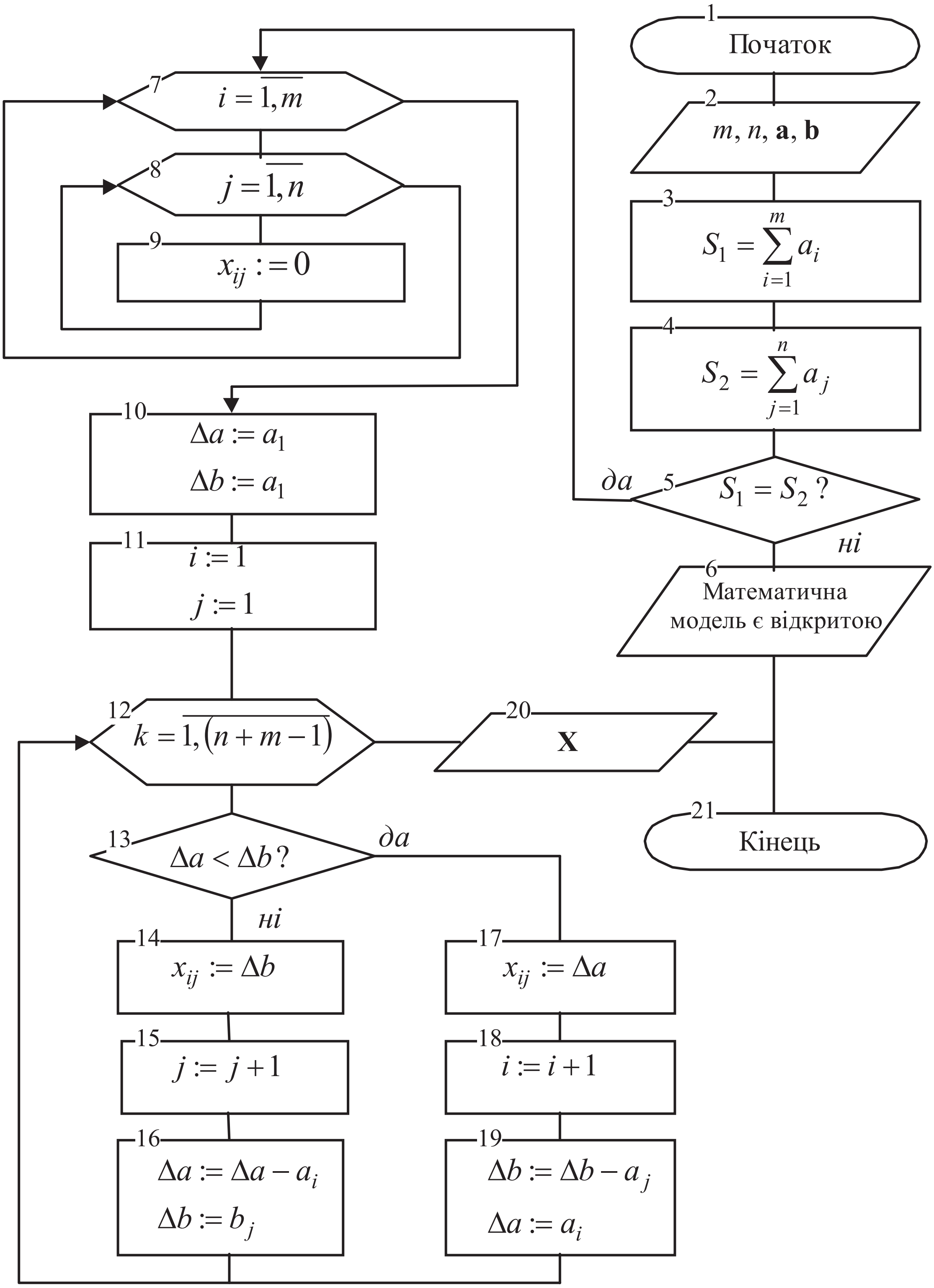


Рис.1.1 – Схема алгоритму визначення початкового опорного плану в транспортній задачі методом північно-західного кута

блоки 12-19 – безпосереднє формування початкового опорного плану;

блок 20 – вивід результату.

Слід зауважити, що на деякому кроці (але не на останньому) може трапитися, що потреби у вантажі чергового пункту призначення рівні запасам чергового пункту відправлення. У цьому випадку з подальшого розгляду виключають або стовпець, або рядок, тобто тільки що-небудь одне. Таким чином, запаси відповідного пункту відправлення, або потребу відповідного пункту призначення вважають рівними нулю. Цей нуль записують у чергову клітку, яка заповнюється.

Зазначені вище умови гарантують одержання $m+n-1$ зайнятих кліток, у яких знаходяться компоненти опорного плану.

Опорний план перевезень повинен відповідати таким вимогам:

по-перше, кількість зайнятих маршрутів (кліток) повинно бути на одиницю менше суми числа постачальників m і числа споживачів n, тобто повинна дорівнювати значенню $m+n-1$;

по-друге, не повинно бути жодного зайнятого маршруту (клітки), що опинився б єдиним і в рядку, і в стовпці таблиці.

1.3.5. Визначення оптимального опорного плану транспортної задачі

Для визначення оптимального плану транспортної задачі розроблено декілька методів. Найбільш часто *використовується метод потенціалів.* Метод припускає, що вже відомий якийсь опорний план. Його можна одержати, наприклад, розглянутим методом північно-західного кута. Вихідний опорний план необхідно перевірити на оптимальність.

Теорема 1.2. Якщо для деякого опорного плану $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ транспортної задачі з заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа α_i $(i=\overline{1,m})$ і β_j $(j=\overline{1,n})$, що

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} > 0 \tag{1.14}$$

$$\text{і} \quad \beta_i - \alpha_j \le c_{ij} \quad \text{при} \quad x_{ij} = 0 \tag{1.15}$$

для всіх $i=\overline{1,m}$ і $j=\overline{1,n}$, то $X^* = \left[x_{ij}^*\right]$ – оптимальний план.

Визначення 1.4. Числа $\alpha_i \ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j \ (j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення і пунктів призначення.

Теорема 1.2 дозволяє побудувати алгоритм знаходження рішення транспортної задачі. Він являє собою наступне.

Нехай знайдений опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів відправлення і призначення визначають потенціали $\alpha_i \ (i=\overline{1,m})$ і $\beta_j \ (j=\overline{1,n})$ із системи рівнянь

$$\beta_i - \alpha_j = c_{ij} \ . \tag{1.16}$$

Тому що число заповнених кліток дорівнює $n+m-1$, то система (1.16) із $n+m$ невідомими містить $n+m-1$ рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне з невідомих потрібно взяти рівним довільному числу, наприклад $\alpha_1 = 0$, і знайти послідовно із системи (1.16) значення інших невідомих.

Після того, як усі потенціали знайдені, для кожною з вільних кліток визначають числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$. Якщо серед чисел α_{ij} немає позитивних, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітки $\alpha_{ij} > 0$, то опорний план , що перевіряється , не є оптимальним, і треба перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають усі вільні клітки, для яких $\alpha_{ij} > 0$, і вибирають ту, для якої число α_{ij} максимальне. Обрану клітку необхідно заповнити.

Заповнюючи обрану клітку, треба змінити обсяги перевезень, записаних у ряді інших зайнятих клітках і зв'язаних з обраною *циклом*.

Визначення 1.5. Циклом у таблиці транспортної задачі називається замкнута ломана лінія, вершини якої розташовані в зайнятих клітках таблиці, а ланки – уздовж рядків і стовпів, причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша – у стовпці.

Якщо ломана лінія, що складає цикл, перетинається сама із собою, то точка самоперетину не є вершиною. Приклади можливих циклів показані на рис.1.2.

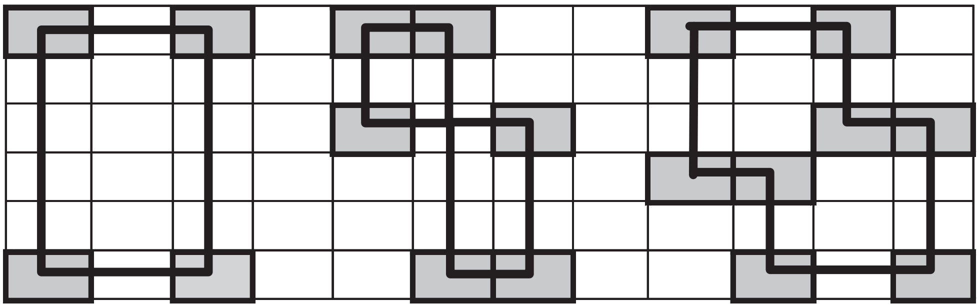


Рис.1.2

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітки можна побудувати тільки один цикл. Після того як для обраної вільної клітки він побудований, необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього треба перемістити вантажі в межах кліток, що утворюють цикл. Переміщення роблять за такими правилами:

кожній з кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, приписують знак “+” або “–“, причому вільній клітці – знак плюс , а всім іншим кліткам – по черзі знаки мінус і плюс;

у вільну клітку переносять менше з чисел x_{ij}, що знаходяться в мінусових клітках, і одночасно це число додають до відповідних чисел, що знаходяться “плюсових” клітках, і віднімають із чисел, що знаходяться в “мінусових” клітках. Клітка, що раніше була вільною, стає зайнятою, а “мінусова” клітка, в якій стояло мінімальне число x_{ij}, стає вільною.

У результаті зазначених вище переміщень вантажів у межах кліток, пов'язаних циклом з обраною вільною кліткою, визначають новий опорний план транспортної задачі. Число зайнятих кліток залишається рівним $n+m-1$. Якщо в зайнятих “мінусових” клітках циклу є два і більше однакових мінімальних чисел x_{ij}, то звільняють тільки одну з таких кліток, а інші залишають зайнятими з нульовими постачаннями.

Отриманий новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів відправлення і призначення і знаходять числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$ для всіх вільних кліток. Якщо серед цих чисел не буде позитивних, то це означає, що новий опорний план є оптимальним. Якщо ж є позитивні числа, то необхідно перейти до нового опорного плану. У результаті ітераційного процесу після кінцевого числа переходів одержують оптимальний план задачі.

Таким чином, процес знаходження рішення транспортної задачі методом потенціалів включає наступні етапи:

1-й етап. Знаходять опорний план.

2-й етап. Знаходять потенціали пунктів відправлення і призначення.

3-й етап. Визначають числа α_{ij} для кожної вільної клітки. Якщо серед них немає позитивних, то отримано оптимальний план транспортної задачі, у противному разі переходять до нового опорного плану.

4-й етап. Вибирають серед позитивних чисел α_{ij} максимальне, будують для відповідної вільної клітки цикл перерахування і роблять зсув за циклом, одержуючи при цьому новий опорний план. Далі переходять до 2-го етапу.

Розглянемо приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів.

1.3.6. Приклад вирішення транспортної задачі методом потенціалів

Приклад 1.1. Три заводи, що виготовляють бетоні конструкції, постачаються цементом з чотирьох складів. Попит заводів b_j відповідно дорівнює 280, 90 і 180 *тис.т/міс.* Пропускна здатність складів a_i відповідно становить 200, 150, 80 і 120 *тис.т/міс.* Відстані перевезень (у *км*) із i-го складу на j-й завод подані в матриці

$$\mathbf{C} = \left[c_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 9 \\ 2 & 7 & 4 \\ 4 & 1 & 11 \end{bmatrix}.$$ Потрібно скласти план перевезень цементу зі складів на заводи, що задовольняв би пропускним спроможностям

складів і потребам заводу, а сумарний пробіг вантажного транспорту був би мінімальним.

Вирішення. Позначимо через x_{ij} – кількість цементу, який щомісяця потрібно доставляти на j–й завод з i–го складу. Тоді математична модель задачі має вигляд

$$y = x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 6x_{21} + 8x_{22} + 9x_{23} + 2x_{31} + 7x_{32} +$$

$$+ 4x_{33} + 4x_{41} + x_{42} + 11x_{43} \to \min_{x_{ij} \in \Omega}; \qquad (1.17)$$

$$\Omega: \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 280; \qquad (1.18)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 90; \qquad (1.19)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 180; \qquad (1.20)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 200; \qquad (1.21)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 150; \qquad (1.22)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 80; \qquad (1.23)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} = 120; \qquad (1.24)$$

$$x_{ij} \geq 0. \qquad (1.25)$$

Тут (1.17) – цільова функція, (1.18) – (1.20) – обмеження задачі, що визначають місячні запаси цементу на складах, (1.21) – (1.24) – обмеження задачі, що визначають місячну потребу в цементі на заводах, (1.25) – обмеження, що визначає неможливість негативних значень для постачань цементу на заводи.

1-й крок. *1-й етап.* Використовуючи метод північно-західного кута, знайдемо опорне рішення транспортної задачі (1.17) – (1.25).

Відповідно до цього методу заповнюємо таблицю, починаючи з лівого верхнього квадрата. Порівнюємо запас вантажу в першому пункті відправлення (200 *тис.т/міс.*) із потребою першого пункту призначення (280 *тис.т/міс.*). Вибираємо меншу величину (200) і записуємо її в даний квадрат. Оскільки весь запас у першому пункті відправлення вичерпаний, то з подальшого розгляду виключаємо перший рядок і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться нижче заповненої. У новій клітці для частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення верхньої лівої клітки, але з урахуванням того, що потреба першого пункту призначення зменшилася на *200 тис.т/міс.* і стала рівною 80 *тис.т/міс.* Тобто порівнюємо запас другого пункту відправлення (150 *тис.т/міс.*) із новою потребою першого пункту призначення (80 *тис.т/міс.*). Вибираємо меншу величину(80) і записуємо її в нову клітку. Оскільки потреба у вантажі в першому пункті призначення повністю задоволена, то з подальшого розгляду виключаємо перший стовпець і переходимо в сусідню клітку, що знаходиться справа від тільки що заповненої. Для нової верхньої лівої клітки частини таблиці, що залишилася, повторюємо процедуру заповнення з урахуванням зміни запасу в другому пункті відправлення на *80 тис.т/міс.* І так доти, поки не буде заповнено $m+n-2$ кліток.

Остання ($m+n-2$)-я клітка заповнюється механічно – у неї записується залишкова потреба останнього пункту призначення або залишковий запас останнього пункту відправлення. В умовах задачі це величина 120. Усі проміжні результати по знаходженню початкового опорного плану $\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 20 & 60 \\ 0 & 0 & 120 \end{bmatrix}$ відображені в табл. 1.2. Ці результати в таблиці виділені напівжирним шрифтом.

Для початкового опорного плану обчислюємо значення цільової функції (1.17):

$$y_0 = 1\cdot 200 + 6\cdot 80 + 8\cdot 70 + 7\cdot 20 + 4\cdot 60 + 11\cdot 120 = 2940 \text{ } \textit{тис.т/міс.}$$

Це значення буде використано на наступних кроках для контролю просування до оптимуму. Значення цільової функції повинно послідовно зменшуватися з кожним кроком.

Таблиця 1.2

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 **200**	5	3	0
2	150	6 **80**	8 **70**	9	-5
3	80	2	7 – **20**	4 + **60**	-4
4	120	4	1 +	11 – **120**	-11
Потенціал пункту призначення β_j		1	3	0	

<u>*2-й етап.*</u> Знайдений опорний план перевіряємо на оптимальність. У зв'язку з цим знаходимо потенціали пунктів відправлення і призначення із системи

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 6 \quad , \qquad \beta_2 - \alpha_3 = 7\,,$$

$\beta_3 - \alpha_4 = 11$, що містить шість рівнянь із сімома невідомими. Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_3 = -4$, $\beta_3 = 0$, $\alpha_3 = -11$. Записуємо знайдені потенціали в табл.1.2.

<u>*3-й етап.*</u> Для кожної вільної клітки обчислюємо числа $\alpha_{ij} = \beta_i - \alpha_j - c_{ij}$: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = -3$, $\alpha_{23} = -4$, $\alpha_{31} = 3$, $\alpha_{41} = 8$, $\alpha_{42} = 13$.

Записуємо знайдені числа у відповідні вільні клітки табл.1.2 і вміщуємо їх у рамочки, щоб відрізняти їх від іншої інформації в таблиці. Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план $\mathbf{X}_0$ не є ці. Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні, то опорний план $\mathbf{X}_0$ не є оптимальним.

<u>*4-й етап.*</u> Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: $\alpha_{42} = 13$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.2 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо знаками «–» і «+» по черзі інші клітки циклу, слідуючи уздовж ломаної лінії циклу.

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{32} (20). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{42} =20, x_{43} =120-20=100, x_{33} =60+20=80.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 80 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 100 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 2680 *тис.т/міс.*, що менше вихідного значення 2940 *тис.т/міс.*

На цьому закінчується 1-й крок оптимізації. На наступному кроці процедура 1-го кроку повторюється, але без 1-го етапу.

2-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.3) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо таку систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_2 - \alpha_2 = 8, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$

$$\beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11$$

.

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 3$, $\alpha_4 = 2$, $\beta_3 = 13$, $\alpha_3 = 9$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -2$, $\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$, $\alpha_{31} = -10$, $\alpha_{32} = -13$, $\alpha_{41} = -5$.

Тому що серед чисел α_{ij} є позитивні ($\alpha_{13} = 10$, $\alpha_{23} = 9$) , то опорний план $\mathbf{X}_1$ не є оптимальним.

Таблиця 1.3

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 – **200**	5	3 +	0
2	150	6 + **80**	8 – **70**	9	-5
3	80	2	7	4 **80**	9
4	120	4	1 + **20**	11 – **100**	2
Потенціал пункту призначення β_j		1	3	13	

Серед позитивних чисел α_{ij} вибираємо максимальне: $\alpha_{13} = 10$. Для відповідної вільної клітки будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.3 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+».

Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{23} (70). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} =200–70=130, x_{13} =70, x_{21} =80+70=150, x_{42} =20+70=90, x_{43} =100–70=30.

У результаті виконаних перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 130 & 0 & 70 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 0 & 90 & 30 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 1980 *тис.т/міс.*, що значно менше попереднього значення 2680 *тис.т/міс.*

3-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.4) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4, \qquad \beta_3 - \alpha_4 = 11.$$

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\beta_3 = 4$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = -8$, $\beta_2 = -7$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -12$, $\alpha_{22} = -10$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = -1$, $\alpha_{32} = -14$, $\alpha_{41} = 5$. Оскільки серед чисел α_{ij} одне позитивне ($\alpha_{41} = 5$), то опорний план $\mathbf{X}_2$ не є оптимальним.

Таблиця 1.4

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 – **130**	5	3 + **70**	0
2	150	6 **150**	8	9	–5
3	80	2	7	4 **80**	0
4	120	4 +	1 **90**	11 – **30**	–8
Потенціал пункту призначення β_j		1	–7	3	

Для відповідної вільної клітки (нижньої, лівої) будуємо цикл, а саму клітку позначаємо знаком «+». У табл.1.4 зайняті клітки, що складають цикл, виділені сірим фоном. Потім позначаємо вузлові клітки циклу по черзі знаками «–» і «+». Найменшим із чисел x_{ij} у «мінусових» клітках є x_{43} (30). Дана клітка стає вільною, а інші клітки циклу змінюють свої значення в такий спосіб: x_{11} =130–30=100, x_{13} =70+30=100, x_{14} =30.

У результаті зроблених перетворень одержуємо новий опорний план $\mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 100 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \\ 30 & 90 & 0 \end{bmatrix}$. При такому опорному плані функція цілі (1.17) стає рівною 1830 *тис.т/міс.*, що менше попереднього значення 1980 *тис.т/міс.*

4-й крок. Аналізуємо новий опорний план (див. табл.1.5) на оптимальність. Знову знаходимо потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення, для чого складаємо наступну систему рівнянь:

$$\beta_1 - \alpha_1 = 1\,, \qquad \beta_1 - \alpha_2 = 6\,, \qquad \beta_1 - \alpha_4 = 4\,,$$
$$\beta_3 - \alpha_1 = 3\,, \qquad \beta_3 - \alpha_3 = 4\,, \qquad \beta_2 - \alpha_4 = 1\,.$$

Вважаючи $\alpha_1 = 0$, знаходимо $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 3$, $\alpha_2 = -5$, $\alpha_3 = -1$, $\alpha_4 = -3$, $\beta_2 = -2$. Для кожної вільної клітки обчислюємо числа α_{ij}: $\alpha_{12} = -7$, $\alpha_{22} = -4$, $\alpha_{23} = -1$, $\alpha_{31} = 0$, $\alpha_{32} = -8$, $\alpha_{41} = -5$. Тому що серед чисел α_{ij} немає строго позитивних, то опорний план $\mathbf{X}_3$ є оптимальним.

Таблиця 1.5

Пункт відправлення	Запас вантажу	Пункт призначення			Потенціал пункту відправлення α_i
		1	2	3	
		Потреба			
		280	90	180	
1	200	1 **100**	5	3 **100**	0
2	150	6	8	9	–5

		150			
3	80	2	7	4 **80**	–1
4	120	4 **30**	1 **90**	11	–3
Потенціал пункту призначення β_j		1	–2	3	

Тема 1.4. Інформаційні технології вирішення задач математичного програмування

1.4.1. Вибір інформаційної технології вирішення задач математичного програмування

Вирішення будь-якої задачі математичного програмування традиційним ручним способом (без залучення засобів обчислювальної техніки) потребує від економістів і менеджерів великих затрат сил і часу для здійснення ітераційних процесів наближення до оптимуму. Використання мікрокалькуляторів може значно прискорити процес вирішення, але все рівно не може гарантувати швидкого і надійного відшукання рішення. Ситуація різко змінюється, якщо для вирішення задач математичного програмування використовувати сучасні інформаційні технології. Існує ряд потужних інформаційних систем, що значно знижують ризик одержання помилкового результату і на декілька порядків скорочують час вирішення задач.

Використання сучасних інформаційних систем для вирішення задачі математичного програмування потребує від користувачів тільки правильного укладання математичної моделі задачі і її введення в комп'ютер. Якщо раніше економісту треба було детально володіти методами вирішення різних класів екстремальних задач, то тепер він може не обтяжувати себе вивченням цих методів, а зосередити увагу на правильності постановки задачі. Якщо математична модель неадекватна умові задачі, то ніякі методи і ніяка обчислювальна техніка не допоможуть її постановникові.

Для вирішення задач математичного програмування з економічним ухилом найбільш удалим є використання сучасної інформаційної системи *Microsoft Excel* версії 7.0 і вище. Пояснюється це, насамперед, тим, що дана система є програмним інструментом для вирішення інших (не зв'язаних із пошуком екстремуму) задач економіки. Великою перевагою системи є її універсальність. Практично будь-які типи задач